TUGAS AKHIR - SF141501

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK BEROTASI PADA RUANG $ADS_5 \times S^5$

M. AFIF ISMAIL
NRP 1113100090

Dosen Pembimbing
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2017

Halaman ini sengaja dikosongkan

TUGAS AKHIR - SF141501

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK BEROTASI PADA RUANG $ADS_5 \times S^5$

M. AFIF ISMAIL
NRP 1113100090

Dosen Pembimbing
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2017

Halaman ini sengaja dikosongkan

UNDERGRADUATE THESIS - SF141501

ROTATING RELATIVISTIC STRING SOLUTIONS IN $ADS_5 \times S^5$

M. AFIF ISMAIL
NRP 1113100090

Supervisor
Agus Purwanto, D.Sc

Department of PHYSICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2017

Halaman ini sengaja dikosongkan

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK BEROTASI PADA RUANG $ADS_5 \times S^5$

TUGAS AKHIR

Diajukan Guna Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Fisika Teori
Program Studi S1 Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
M. Afif Ismail
NRP: 1113100090

Disetujui oleh Dosen Pembimbing Tugas Akhir :

Agus Purwanto, D.Sc ....
NIP: 197907162005011002 (Pembimbing)

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN FISIKA

SURABAYA
Juli 2017

Halaman ini sengaja dikosongkan

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK BEROTASI PADA RUANG $ADS_5 \times S^5$

Nama	: M. AFIF ISMAIL
NRP	: 1113100090
Jurusan	: Fisika FMIPA
Pembimbing	: Agus Purwanto, D.Sc

ABSTRAK

Dawai merupakan objek yang mempunyai dua parameter gerak yaitu waktu dan panjang dawai, yang merupakan generalisasi dari partikel yang mempunyai satu parameter gerak berupa waktu. Pada penelitian ini, digunakan kondisi batas dawai berupa dawai tertutup. Dawai relativistik bergerak pada ruang-waktu dengan lintasan berupa sebuah luasan yang dibentuk oleh dua parameter, lintasan ini biasa disebut lembaran dunia *(world-sheet)*. Dawai relativistik ini juga mempunyai dua aksi yang disebut aksi Nambu-Goto dan aksi Polyakov. Aksi Nambu-Goto dibangun dengan menggunakan *(world-sheet)*. Sedangkan aksi Polyakov merupakan bentuk lain dari aksi Nambu-Goto dengan penambahan alat matematis berupa metrik *(auxilliary field)* yang dapat menyederhanakan pengerjaan aksi. Pada penelitian ini digunakan aksi Polyakov dengan metrik *(auxilliary field)* berupa metrik minkowski. Dengan menggunakan aksi Polyakov, digunakan model dawai bergerak pada bidang datar dan ditentukan energi beserta momentum sudut dari dawai. Selanjutnya, digunakan model dawai bergerak pada ruang $AdS_5 \times S^5$ dan ditentukan energi serta momentum sudut dari dawai. Dari perhitungan yang telah dilakukan, energi dawai yang berputar pada $AdS_5 \times S^5$ mempunyai bentuk yang ekivalen dengan energi dawai yang berputar pada bidang datar.

Kata-Kunci: Aksi Polyakov, Ruang $AdS_5 \times S^5$, Dawai Relativistik

Halaman ini sengaja dikosongkan

ROTATING RELATIVISTIC STRING SOLUTIONS IN $ADS_5 \times S^5$

Name	: M. AFIF ISMAIL
NRP	: 1113100090
Department	: Physics
Supervisor	: Agus Purwanto, D.Sc

ABSTRACT

String is an object that possess two movement parameters, time and string length, generalization from particle that possess one movement parameter that is time. In this thesis a restriction is used which is closed string. Relativistic string move in space-time with trajectory in form of area made of two parameters, this trajectory is called world-sheet. Relativistic string have two action called Nambu-Goto and Polyakov. Nambu-Goto action built using world-sheet. While Polyakov is the other form of Nambu-Goto with addition of mathmetical tool that is auxilliary field matrix that can simplify execution of actions. In this thesis Polyakov action is used with minkowski matrix as the auxilliary field matrix. By using Polyakov action, moving string model is used on flat plane also the energy and angular momentum of the string is determine. Next, moving string model is used on Ad5 x S5 also the energy and the angular momentum of the string is determine. From the calculation that had been made, energy of spinning string on Ad5 x S5 have a form equivalent with energy on spinning string on a flat plane.

Keywords: Polyakov Action, $AdS_5 \times S^5$ space, Relativistic String

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirabbil'alamiin

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT karena atas karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK BEROTASI PADA RUANG $AdS_5 \times S^5$"**. Tugas akhir ini diharapkan dapat membantu rekan-rekan mahasiswa S1 yang ingin belajar lebih mendalam tentang Fisika terutama di sekitar topik Teori Dawai.

Terselesaikannya tugas akhir ini tidak luput dari bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih dengan setulus hati kepada:

1. Umi dan Ayah atas segala yang telah diberikan kepada penulis dengan penuh kasih sayang. Penulis tidak akan mampu membalasnya.
2. Bapak Agus Purwanto D.Sc, atas segala bimbingan selama berada di ITS hingga penyelesaian tugas akhir. Penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kesalahan yang telah dilakukan.
3. Bapak Dr. Yono Hadi Pramono selaku Ketua Departemen Fisika FMIPA-ITS.
4. Dr. Sheng-Lan Ko atas segala bimbingan selama penulis mempelajari teori dawai di *Institute for Fundamental Study*. dan Mas Chandra atas bantuannya selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir di Thailand.
5. Bapak Dr. rer. nat Bintoro Anang Subagyo, Bapak I Nengah Artawan M.Si, Bapak Heru Sukamto M.Si, Bapak Lila Yuwana M.Si serta Bapak dan Ibu dosen yang telah mengajarkan ilmu kepada penulis.
6. Sahabat-sahabat di LaFTiFA, Dwi, Ira, Afidah, Anom, Adam, Bayu, Kasyfil, Nusur sebagai teman diskusi. Terutama Fasya yang telah banyak membantu penulis selama pengerjaan tugas akhir.
7. Arek-arek Kontrakan, Dwi, Fahru, Tito, Senpai, Taufik, Erik yang telah banyak membantu penulis selama di Kontrakan.
8. Teman-teman seperjuangan Fisika 2013 (Supernova) atas bantuannya selama di Jurusan Fisika.
9. Kakak-kakak angkatan dan Alumni di Jurusan Fisika
10. Adik Fisika 2014,2015,2016. Semoga tetap terjaga keharmonisan di Jurusan Fisika.
11. Serta semua pihak yang telah membantu dan tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan serta dapat menjadi sumbangan bagi almamater tercinta dalam pengembangan sains kedepannya.

Surabaya, Juli 2017
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR GAMBAR

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Benda yang berada disekitar kita dibentuk oleh sekumpulan atom yang saling berikatan. Atom merupakan objek yang terdiri dari partikel elektron, proton dan neutron. Elektron termasuk kedalam partikel fundamental, sedangkan proton dan neutron masih tersusun oleh partikel fundamental yang disebut. Partikel fundamental diyakini merupakan objek dengan ukuran paling kecil, sehingga tidak dapat dibagi lagi. Partikel fundamental ini terbagi menjadi dua, yaitu fermion dan boson. Fermion merupakan partikel yang dapat berinteraksi. Sedangkan boson merupakan partikel pembawa interaksi antara fermion.

Pada tahun 1970, Yoichiro Nambu, Holger Bech Nelson, dan Leonard Susskind berargumen bahwasannya terdapat kandidat objek dasar penyusun materi berupa dawai. Argumen ini muncul dari penelitian Gabriele Veneziano tentang interaksi kuat pada partikel hadron. Yoichiro Nambu dan Tetsuo Goto merumuskan dawai tersebut dalam kerangka relativistik dengan melakukan generalisasi dari konsep partikel titik yang mempunyai nol dimensi menjadi dawai dengan dimensi satu. Pada tahun 1974, Alexander Markovich Polyakov menguantisasi dawai relativistik dengan menerapkan relasi komutasi posisi momentum dari mekanika kuantum sehingga didapatkan dawai bosonic. Teori dawai bosonic hanya dapat mendiskripsikan partikel elementer dengan spin bulat(partikel bosonic). Sehingga dibutuhkan teori dawai baru untuk menyempurnakan teori dawai dalam mendenkripsikan partikel fundamental lain berupa fermion. Teori dawai tersebut dinamakan teori dawai super. Teori ini ditemukan dengan menggabungkan *supersymmetry* dengan dawai bosonic. Hal ini menyebabkan munculnya dawai fermion.

Sekitar dua puluh tahun yang lalu, fisikawan menemukan sifat baru dari teori dawai. Ketika teori dawai super diterapkan dalam ruang-waktu anti de Sitter, dawai tersebut dapat menjelaskan fenomena fisika yang serupa dengan teori medan kuantum. Teori ini dikemukakan oleh Maldacena dengan nama korespondensi *anti de Sitter/Conformal Field Theory* (Ads/CFT). Maldacena berargumen bahwa dunia dengan dimensi (3+1) tanpa gravitasi dan ruang waktu anti de Sitter (4+1) saling berhubungan.

Pada tugas akhir ini, digunakan dawai relativistik untuk diterapkan ke dalam ruang anti de sitter. Dengan menggunakan bentuk pergerakan dawai tertutup beroutar, dihitung energi dari dawai tersebut dan pengaruh dari penerapan dawai relativistik ke dalam ruang ruang-waktu anti de Sitter terhadap sifat fisis dari dawai tersebut. Pada perhitungan energi dawai, dilakukan pendekatan dawai berputar sangat cepat dan sangat lambat.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah dari tugas akhir ini adalah bagaimana solusi dari dawai relativistik serta pengaruh dari penerapan dawai relativistik ke dalam ruang ruang-waktu anti de Sitter.

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai pada tugas akhir ini adalah menerapkan dawai Relativistik berputar menggunakan aksi Polyakov pada ruang $AdS_5 \times S^5$, serta mengetahui energi dari beberapa model dawai dan mengetahui Energi dawai pada ruang $AdS_5 \times S^5$ Dengan ruang datar

1.4 Batasan Masalah

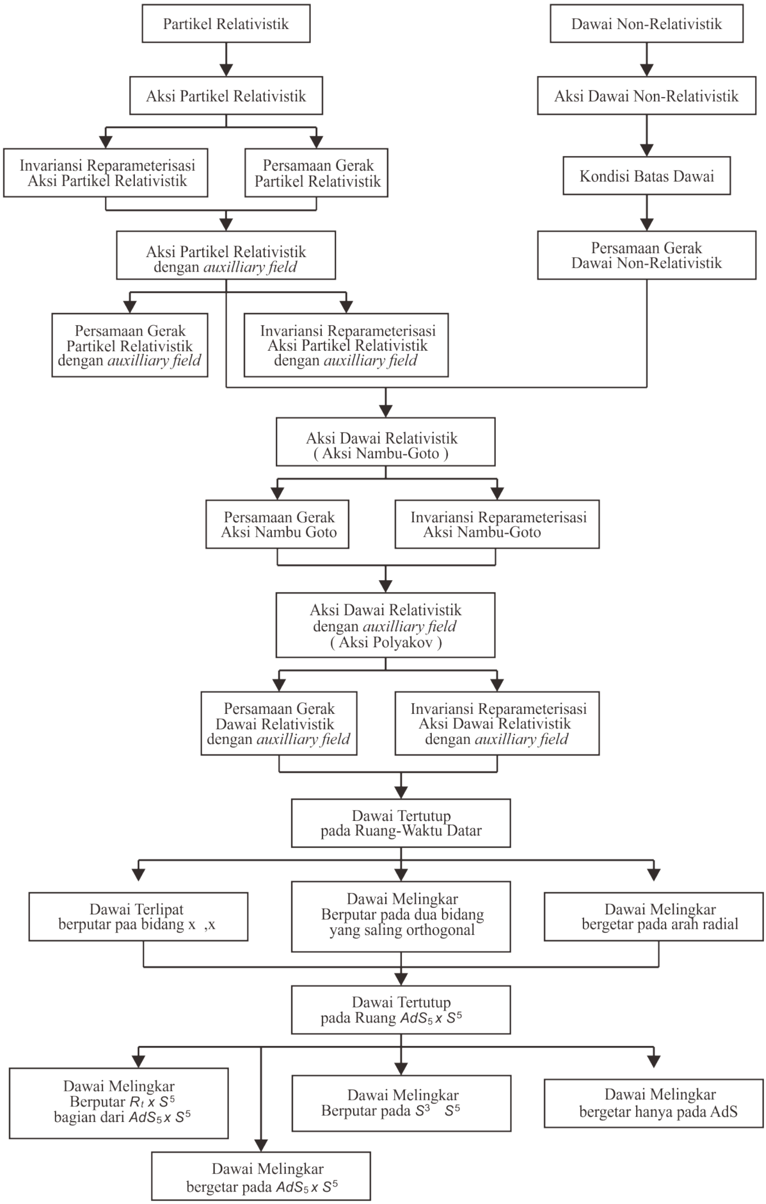
Pada tugas akhir ini permasalahan hanya dibatasi pada sampai penerapan aksi polyakov pada ruang $AdS_5 \times S^5$

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini adalah metode analitis dari studi literatur. Skema pengerjaan tugas akhir ini diberikan pada gambar (1.1)

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan Tugas Akhir ini , terdiri dari 6 bab. Pada bab I diuraikan mengenai motivasi sejarah singkat munculnya Teori Dawai. Pada bab II akan diuraikan aksi Nambu-Goto dan aksi Polyakov dari dawai relativistik. Pada bab III akan diturunkan solusi dawai relativistik pada ruang datar dengan menggunakan 3 model dawai. Pada bab IV akan diturunkan solusi dawai relativistik pada ruang $AdS_5 \times S^5$ dengan menggunakan 4 model dawai. Bab V adalah kesimpulan dan saran. Lampiran berisi materi tambahan yang terkait dengan tugas akhir ini. Untuk menyederhanakan pengerjaan tugas akhir ini, digunakan $c = 1$. Digunakan notasi $\partial x^\mu / \partial \tau = \dot{x}^\mu$ dan $\partial x^\mu / \partial \sigma = \acute{x}^\mu$.



Gambar 1.1: Skema pengerjaan tugas akhir

BAB 2

DAWAI RELATIVISTIK

Dawai merupakan objek yang mempunyai dua parameter gerak yaitu panjang dawai dan waktu, seperti halnya partikel yang hanya mempunyai satu parameter gerak berupa waktu. Dawai relativistik merupakan dawai yang bergerak dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya $v \approx c$ pada pusat massanya terhadap suatu kerangka acuan.

2.1 Aksi Nambu-Goto

Untuk mendeskripsikan suatu sistem yang bergerak, dapat digunakan persamaan gerak yang dibangun dari persamaan aksi dari sistem tersebut. Dawai mempunyai 2 parameter dalam pergerakannya di ruang-waktu x^μ yaitu panjang dawai σ dan waktu pergerakan dawai τ. Aksi dapat dibangun dari lintasan yang dilalui dawai pada ruang-waktu. Lintasan ini berupa area dua dimensi yang terdiri dari 2 parameter dawai seperti pada gambar (2.1). Area ini disebut lembaran-dunia (*world-sheet*)

Di ambil bentuk umum dari lembaran-dunia berupa jajargenjang. Area dari permukaan pada jajargenjang kecil dibentuk oleh tangen vektor dengan garis σ^0 dan σ^1 seperti pada gambar (2.2). Dimana $\sigma^0 \equiv \tau, \sigma^1 \equiv \sigma$

$d\sigma^0$ dan $d\sigma^1$ mempresentasikan perpindahan pada koordinat, bukan jarak sebenarnya. Metrik g_{ab} pada permukaan *world-sheet* Σ, mempresentasikan bagaimana mengubah perpindahan pada koordinat menjadi jarak yang sebenarnya ds^2.

$$(ds)^2 = g_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \tag{2.1}$$

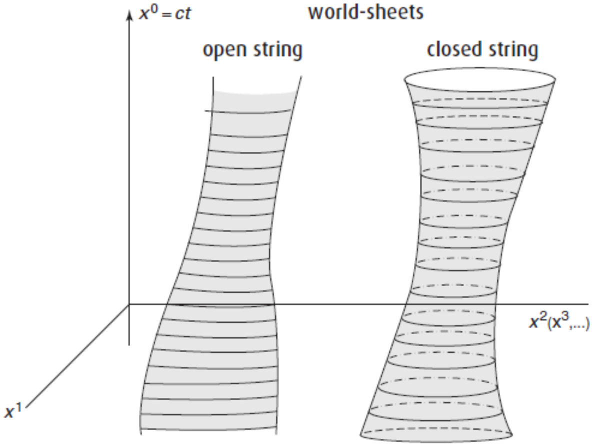
untuk $a, b = 0, 1$. Maka jarak sebenarnya dari perpindahan koordinat $d\sigma^0$ ialah

$$||d\sigma^0|| = \sqrt{g_{00}}\, d\sigma^0 \tag{2.2}$$

dan untuk σ^1

$$||d\sigma^1|| = \sqrt{g_{11}}\, d\sigma^1 \tag{2.3}$$

Area dari jajargenjang merupakan hasil *cross product* dari $d\sigma^0$ dan $d\sigma^1$, maka didapatkan area dari jajargenjang

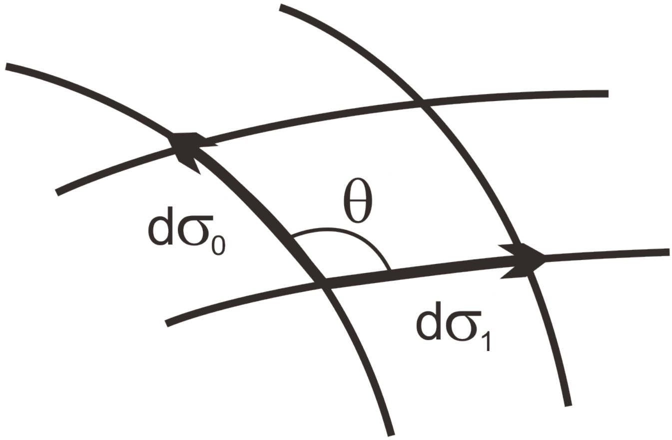


Gambar 2.1: Gambaran dari *world-sheet*. Disebelah kiri berupa dawai terbuka, dan yang disebelah kanan berupa dawai tertutup Σ

$$
\begin{aligned}
||d\sigma^0 \times d\sigma^1|| &= ||d\sigma^0||\ ||d\sigma^1|| \sin(\theta) \\
&= ||d\sigma^0||\ ||d\sigma^1|| \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{||d\sigma^0||^2\ ||d\sigma^1||^2 - ||d\sigma^0||^2\ ||d\sigma^1||^2 \cos^2\theta} \\
&= \sqrt{||d\sigma^0||^2\ ||d\sigma^1||^2 - ||d\sigma^0.d\sigma^1||^2} \\
&= \sqrt{g_{00}(d\sigma^0)^2\ g_{11}(d\sigma 1)^2 - (g_{01})^2(d\sigma^0)^2(d\sigma^1)^2} \\
&= d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{g_{00}g_{11} - (g_{01})^2} \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Tanda dibawah akar pada persamaan (2.4) bernilai negatif. Untuk mengetahuinya, dimisalkan menggunakan metrik Minkowski 2 dimensi

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.5)
$$



Gambar 2.2: Area dari permukaan jajargenjang Σ

maka didapatkan $g_{00}g_{11} - (g_{01})^2 < 0$. Agar dapat menghilangkan nilai negatif. Maka suku pertama dan kedua didalam akar dibalik, sehingga tanda dibawah akar tidak bernilai negatif. Dengan melakukan hal ini, didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} dA(\text{area } \Sigma) &= ||d\sigma^0 \times d\sigma^1|| \\ &= d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{(g_{01})^2 - g_{00}g_{11}} \\ &= d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-\text{det } g_{ab}} \\ &= d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-g} \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan penulisan $det\ g_{ab}$ dituliskan dalam bentuk g.

Metrik pada permukaan Σ dapat dipetakan ke dalam koordinat ruang-waktu. Dalam pemetaan permukaan Σ kedalam ruang-waktu, maka permukaan membutuhkan metrik yang disebut *induced metric* (metrik induksi). Untuk menentukan bentuk eksplisit dari *induced metric* didalam ruang-waktu. Dianggap jarak pada ruang-waktu diberikan dalam bentuk

$$(ds)^2 = G_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.7}$$

dimana $G_{\mu\nu}$ merupakan metrik ruang-waktu. Jika perpindahan tetap berada pada permukaan Σ, maka

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^0} d\sigma^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} d\sigma^1 \tag{2.8}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8) pada persamaan ds^2 (2.7), didapatkan

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= G_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^0} d\sigma^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} d\sigma^1 \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^0} d\sigma^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} d\sigma^1 \right) \\
&= G_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^0} d\sigma^0 d\sigma^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^1} d\sigma^0 d\sigma^1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^0} d\sigma^1 d\sigma^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^1} d\sigma^1 d\sigma^1 \right) \\
&= G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b} d\sigma^a d\sigma^b
\end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan $\mu, \nu = (0, 1, ...D)$ $a, b = (0, 1)$

Jika perpindahan tetap berada pada permukaan Σ, maka persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk metrik induksi *induced metric* h_{ab} sebagai berikut

$$(ds)^2 = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \tag{2.10}$$

dengan metrik induksinya diberikan dalam bentuk

$$h_{ab} = G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b} \tag{2.11}$$

dengan mensubtitusi pers (2.11) kedalam pers (2.6) dan mengembalikan notasi menjadi σ, τ. Dimana metrik *world-sheet* akan menjadi *induced metric* karena area pada *induced metric* karena sama-sama memiliki bentuk integral terhadap koordinat pada *world-sheet*. Maka didapatkan area dari permukaan Σ ialah

$$
\begin{aligned}
dA(\text{area } \Sigma) &= d\sigma d\tau(-h)^{1/2} \\
&= d\sigma d\tau \left(-\left[(h_{00})^2(h_{11})^2 - ((h_{01})(h_{10}))\right]\right)^{1/2} \\
&= d\sigma d\tau \left(-\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(\left(G_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma}\right)\left(G_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}\right)\right)\right]\right)^{1/2} \\
&= d\sigma d\tau \left(-\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}\right)\right)\right]\right)^{1/2} \\
&= d\sigma d\tau \left(-\left[\dot{x}^2\acute{x}^2 - ((\dot{x}.\acute{x})(\acute{x}.\dot{x}))\right]\right)^{1/2} \\
&= d\sigma d\tau \left((\dot{x}.\acute{x})^2 - \dot{x}^2\acute{x}^2\right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

dengan mendefiniskan bahwa $\frac{\partial x}{\partial \tau} \equiv \dot{x}$, $\frac{\partial x}{\partial \sigma} \equiv \acute{x}$

Diperkenalkan aksi dawai relativistik. Aksi ini sebanding dengan area *world-sheet* sebagai mana *world-line* pada partikel relativistik. Area ini mempunyai satuan panjang kuadrat. Jika dilihat dari pers (2.12), x^μ mempunyai satuan panjang, dan setiap suku dibawah akar mempunyai empat x. Satuan dari τ dan σ hilang, karena setiap suku dibawah akar mempunyai dua turunan τ dan dua turunan σ. Didefiniskan σ dan τ mempunyai satuan panjang dan waktu. Maka didapatkan satuan dari masing-masing besaran

$$
[\tau] = T, \quad [\sigma] = L, \quad [x^\mu] = L, \quad [A] = L^2 \tag{2.14}
$$

dikarenakan aksi S harus mempunyai satuan ML^2/T dan A mempunyai satuan L^2, maka dibutuhkan kuantitas dengan satuan M/T. Digunakan kuantitas tegangan tali yang dibagi dengan kecepatan cahaya. Sehingga didapatkan kuantitas dengan satuan M/T. Selanjutnya, area pada pers (2.12) dikalikan dengan T/c untuk mendapatkan kuantitas dengan satuan aksi. Maka didapatkan aksi dari dawai relativistik

$$S = -\frac{T}{c}\int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{x}.\acute{x})^2 - \dot{x}^2\acute{x}^2} \tag{2.15}$$

Aksi dari dawai relativistik sering disebut sebagai aksi Nambu-Goto. Dirumuskan oleh fisikawan jepang yang mendapatkan penghargaan nobel tahun 2008 Yoichiro Nambu dan Tetsuo Goto.

2.2 Persamaan Gerak dari Aksi Nambu-Goto

Untuk mendapatkan persamaan gerak dari dawai terhadap ruang-waktu x^μ, dilakukan variasi dari aksi terhadap ruang-waktu x^μ. Dimana aksi akan stasioner sehingga bernilai nol pada saat divariasikan. Dari persamaan (2.15)

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T}{c}\int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{x}.\acute{x})^2 - \dot{x}^2\acute{x}^2} \\ &= \int d\sigma d\tau\, \mathcal{L} \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $\mathcal{L}$ merupakan rapat Lagrangian dari sistem, yang diberikan dalam bentuk

$$\mathcal{L}(\dot{x}, \acute{x}) = -\frac{T}{c}\sqrt{(\dot{x}.\acute{x})^2 - \dot{x}^2\acute{x}^2} \tag{2.17}$$

Divariasikan S, dengan $\mathcal{L}$ merupakan fungsi dari $\dot{x}$ dan $\acute{x}$

$$\delta S = \int d\sigma d\tau \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \acute{x}^\mu}\delta \acute{x}^\mu\right] \tag{2.18}$$

dengan menggunakan momentum konjugat, yang mempunyai bentuk

$$\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \qquad \mathcal{P}^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \acute{x}^\mu} \tag{2.19}$$

dan menggunakan

$$\delta \dot{x}^{\mu} = \delta \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau} = \frac{\partial (\delta x^{\mu})}{\partial \tau} \tag{2.20}$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d\sigma d\tau \left[\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta \dot{x}^{\mu} + \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta \acute{x}^{\mu}\right] \\
&= \int d\sigma d\tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu})\, \delta x^{\mu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu})\, \delta x^{\mu}\right] \\
&= \int d\sigma d\tau\, \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right) + \int d\sigma d\tau\, \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right) \\
&\quad - \int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta x^{\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right) \\
&= \int d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right)^{\tau_f}_{\tau_i} + \int d\tau \left(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right)^{\sigma_f}_{\sigma_i} \\
&\quad - \int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\mathcal{P}^{\tau}_{\mu}\, \delta x^{\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}\, \delta x^{\mu}\right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

menggunakan syarat batas kondisi awal τ_i dan kondisi akhir τ_f pada suku pertama

$$\delta x^{\mu}(\tau_i) = \delta x^{\mu}(\tau_f) = 0 \tag{2.22}$$

persamaan ini menggambarkan bahwa pada saat kondisi waktu awal dan kondisi waktu akhir, x^{μ} berada pada posisi yang tetap. dan untuk suku kedua digunakan syarat batas Dirichlet atau Neumann atau dawai tertutup

$$\delta x^{\mu}(\sigma_i) = \delta x^{\mu}(\sigma_f) = 0 \qquad \text{(Dirichlet)} \tag{2.23}$$

persamaan (2.23) menggambarkan kondisi dawai yang kedua ujungnya terikat, sehingga variasi atau pergeseran pada kedua ujungnya bernilai nol.

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}(\sigma_i) = \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}(\sigma_f) = 0 \qquad \text{(Neumann)} \tag{2.24}$$

persamaan (2.24) menunjukan kondisi pada dawai dengan kedua ujung bebas. Pada kondisi ini, tidak ada momentum yang dapat mengalir melebihi kedua ujung dawai. Hal ini mengindikasikan bahwa kedua ujung dawai dapat bergerak bebas pada ruang-waktu

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(\sigma_i) &= \delta x^\mu(\sigma_f) \\ \mathcal{P}^\sigma_\mu(\sigma_i) &= \mathcal{P}^\sigma_\mu(\sigma_f) \qquad \text{(dawai tertutup)} \end{aligned} \tag{2.25}$$

persamaan (2.25) memberikan gambaran bahwa pada dawai tertutup, kondisi pada ujung awal dan ujung akhir bernilai sama.

Dengan menggunakan persamaan (2.22) pada suku pertama dan persamaan (2.23) atau (2.24) atau (2.25) pada suku kedua, maka didapatkan

$$\delta S = -\int d\sigma d\tau\, \delta x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\tau_\mu + \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\sigma_\mu \right) \tag{2.26}$$

Menggunakan prinsip aksi, dimana variasi dari aksi bernilai nol

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x^\mu} &= -\int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\tau_\mu + \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\sigma_\mu \right) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\tau_\mu + \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{P}^\sigma_\mu \end{aligned} \tag{2.27}$$

Persamaan 2.27 merupakan persamaan gerak dari dawai relativistik terhadap ruang-waktu x^μ dari aksi Nambu-Goto. Untuk menentukan persamaan gerak ini diperlukan $\mathcal{P}^\tau_\mu$ dan $\mathcal{P}^\sigma_\mu$ yang didapatkan dari lagrangian sistem.

2.3 Invariansi Parameterisasi Ulang dari Aksi Nambu-Goto

Integral dari aksi pada lembaran dunia (*world-sheet*) diparamaterkan oleh τ dan σ. Lembaran dunia (*world-sheet*) hanya lintasan dawai melalui ruang-waktu sehingga tidak bergantung terhadap pemilihan parameter yang digunakan. Hal ini menyatakan bahwa aksi invariant terhadap parameterisasi ulang.

Pada persamaan aksi (2.15) digunakan parameter τ dan σ. Diperkenalkan parameter baru yang berhubungan dengan τ dan σ. Denga paramtere baru mempunyai bentuk $\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(\tau\sigma)$ dan $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}(\sigma\sigma)$. Untuk mengetahui apakah aksi Nambu-Goto invarian terhadap parameterisasi, dilakukan pengubahan parameter $\tau\sigma \to \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$

$$
\begin{aligned}
S_{NG} &= -\frac{T}{c}\int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma}G_{\mu\nu}\right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma}G_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial \tau}\frac{\partial x^l}{\partial \sigma}G_{kl}\right)} \\
&= -\frac{T}{c}\int d\tau d\sigma \left[\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}G_{\mu\nu}\right)^2\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau}G_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}\frac{\partial \widetilde{x}^l}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}G_{kl}\right)\right]^{1/2} \\
&= -\frac{T}{c}\int d\tau d\sigma \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau}\frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}\right)^2\left(\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{\mu\nu}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\tau}}G_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{x}^l}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{kl}\right)\right]^{1/2} \\
&= -\frac{T}{c}\int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau}\frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}\right)\left[\left(\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{\mu\nu}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\tau}}G_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{x}^l}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{kl}\right)\right]^{1/2} \\
&= -\frac{T}{c}\int d\widetilde{\tau} d\widetilde{\sigma} \sqrt{\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{\mu\nu}\right)^2 - \left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial \widetilde{\tau}}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial \widetilde{\tau}}G_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial \widetilde{\sigma}}\frac{\partial \widetilde{x}^l}{\partial \widetilde{\sigma}}G_{kl}\right)}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Dari perhitungan diatas dapat dilihat bahwa hasil parameterisasi aksi Nambu-Goto mempunyai bentuk yang identik dengan aksi Nambu-Goto itu sendiri. Hal ini menunjukan bahwasannya aksi Nambu-Goto invarian terhadap parameterisasi ulang.

2.4 Aksi Polyakov

Terdapat permasalahan pada aksi Nambu-Goto dikarenakan ruang-waktu x^μ berada didalam akar, yang menyebabkan persamaan ini sulit untuk diselesaikan. Jika dilihat pada persamaan gerak dari aksi Nambu-Goto, persamaan ini terlihat rumit dikarenakan $\mathcal{P}$ merupakan turunan dari lagrangian yang mempunyai ruang-waktu x^μ didalam akar.

Terdapat aksi lain yang lebih sederhana yang disebut aksi Polyakov. Aksi ini terlihat cukup sederhana karena ruang-waktu x^μ tidak berada didalam akar. Pada aksi ini diperkenalkan parameter gerak baru yang dinamakan *auxilliary field*. *Auxilliary field* tidak memberikan sifat fisis baru dari dawai, karena *auxilliary field* hanya merupakan alat matematis agar mempermudah pengerjaan aksi Polyakov. Penambahan *auxilliary field* pada aksi menyebabkan aksi Polyakov mempunyai dua persamaan gerak. Aksi Polyakov dapat dibangun dari aksi Nambu-Goto

$$
\begin{aligned}
S_{NG} &= -\frac{T}{c}\int d\sigma d\tau\sqrt{-h} \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

dengan mengganti metrik induksi $h^{\alpha\beta}$ menjadi metrik *world-sheet* $g^{\alpha\beta}$ yang tidak terikat dengan x^μ. Metrik *world-sheet* ini merupakan *auxiliary field*. Karena, metrik $g^{\alpha\beta}$ tidak memiliki variabel dinamik. Maka didapatkan aksi Polyakov sebagai berikut

$$
S_P = -\tfrac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ \sqrt{-g}\ g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu \tag{2.30}
$$

Aksi Polyakov ini ekuivalen dengan aksi Nambu-Goto secara klasik. Untuk membuktikan bahwasannya aksi Polyakov ekuivalen dengan aksi Nambu-Goto. Dimulai dengan menentukan persamaan gerak aksi Polyakov pada *auxiliary field*, dengan cara memvariasikan aksi terhadap *auxiliary field*

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\delta\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\left(\underbrace{\delta\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu}_{\alpha\to\gamma,\beta\to\rho}+\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\left(\delta\sqrt{-g}g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu+\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g\, g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu+\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Untuk memvariasikan g. Diambil $g_{\alpha\beta}$ berupa matrik 2×2

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11}\end{pmatrix} \text{ and } \delta g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \delta g_{00} & \delta g_{01} \\ \delta g_{10} & \delta g_{11}\end{pmatrix} \tag{2.32}$$

dan invers dari $g_{\alpha\beta}$

$$g^{\alpha\beta}=g^{-1}_{\alpha\beta}=\frac{-1}{-g}\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{01} \\ -g_{10} & g_{00}\end{pmatrix} \tag{2.33}$$

dengan $-g=g_{01}g_{10}-g_{00}g_{11}$

Variasi dari determinan $g_{\alpha\beta}$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\delta(-g)=\delta(-\text{det }g_{\alpha\beta})=g_{01}\delta g_{10}+\delta g_{01}g_{10}-g_{00}\delta g_{11}-\delta g_{00}g_{11} \tag{2.34}$$

jika dibandingkan persamaan (2.34) dengan komponen dari $(-g)(g^{\alpha\beta})$ pada persamaan (2.33). Maka dapat persamaan (2.34) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\delta(-g)=\delta(-\text{det }g_{\alpha\beta})=(-g)g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \tag{2.35}$$

variasi $\delta g_{\alpha\beta}$ harus dituliskan dalam bentuk $\delta g^{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} &= 2 \\ g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} &= 0 \\ g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} &= -\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.36}$$

maka, didapatkan

$$\delta g = -g\ g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{2.37}$$

selanjutnya, subtitusi persamaan (2.37) ke persamaan (2.31)

$$\begin{aligned} \delta S_p &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\ g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu\right. \\ &\left. +\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \\ &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\ g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu\right. \\ &\left. +\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \\ \frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\ g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu + \partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu\right) \end{aligned}$$

dengan menggunakan prinsip aksi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\ \left(g^{\gamma\rho}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu\right) &= \partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu \\ \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\ \left(g^{\gamma\rho}h_{\gamma\rho}\right) &= h_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.38}$$

faktor $(g^{\gamma\rho}h_{\gamma\rho})$ tidak mempunyai indek bebas, persamaan ini memberikan metrik $g_{\alpha\beta}$ sebanding dengan metrik induksi $h_{\alpha\beta}$. Selanjutnya, diambil bentuk determinan terhadap indek α dan β,

$$\det\left(h_{\alpha\beta}\right) = \det\left(g_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1}{2}g^{\gamma\rho}h_{\gamma\rho}\right)^n$$

dengan $n = 2$ merupakan ukuran dari metrik.

$$\begin{aligned} \det(h_{\alpha\beta}) &= \det(g_{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} g^{\gamma\rho} h_{\gamma\rho}\right)^2 \\ \sqrt{\det(h_{\alpha\beta})} &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} g^{\gamma\rho} h_{\gamma\rho}\right)^2} \\ \sqrt{det(h_{\alpha\beta})} &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} \left(\frac{1}{2} g^{\gamma\rho} h_{\gamma\rho}\right) \\ \sqrt{h} &= \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{\gamma\rho} h_{\gamma\rho}\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

jika disubtitusi hasil dari persamaan (2.39) kedalam aksi Polyakov

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu G_{\mu\nu} \\ S_P &= -\frac{T}{c} T \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} \\ S_P &= S_{NG} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Hasil ini menunjukan bahwa aksi Polyakov dan aksi Nambu-Goto ekuivalen.

Dapat dilakukan *gauge fixing* (menentukan parameter matematis dari medan) *Auxilliary field* pada aksi Polyakov kedalam bentuk paling sederhana, dengan memberikan bentuk *Auxilliary field* berupa metrik Minkowski 2-dimensi

$$g^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

2.5 Persamaan Gerak dari Aksi Polyakov

Untuk menentukan persamaan gerak dari aksi Polyakov pada ruang-waktu x^μ, dilakukan variasi aksi terhadap ruang-waktu x^μ. Dari aksi

Polyakov pada persamaan (2.30

$$\delta S_p \quad = \quad -\frac{T}{2c}\int d\sigma\, d\tau\, \delta\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu G_{\mu\nu}\right) \tag{2.42}$$

dilakukan *gauge fixing* (2.41) pada *auxilliary field*, dimana *auxilliary field* mempunyai bentuk sebagai ruang-waktu datar.

$$g^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

maka,

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ \delta\left(\mu^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu G_{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ \delta\left(\mu^{\tau\tau}\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} + \mu^{\sigma\sigma}\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ \delta\left((-1)\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} + (1)\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ (-\delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\mu \delta(\partial_\tau x^\nu) G_{\mu\nu} \\
&\quad -\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}) + \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\mu \delta(\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu}) \\
&\quad +\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu})) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ \Bigg(-\delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \underbrace{\partial_\tau x^\mu \delta(\partial_\tau x^\nu) G_{\mu\nu}}_{\mu\longleftrightarrow\nu} \\
&\quad -\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}) + \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} \\
&\quad + \underbrace{\partial_\sigma x^\mu \delta(\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu})}_{\mu\longleftrightarrow\nu} + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu})\Bigg) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\ (-\delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\nu \delta(\partial_\tau x^\mu) G_{\nu\mu} \\
&\quad -\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}) + \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\nu \delta(\partial_\sigma x^\mu G_{\nu\mu}) \\
&\quad +\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}))
\end{aligned}$$

karena metrik ruang-waktu $G_{\mu\nu}$ merupakan metrik simmetri $G_{\nu\mu}$

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\,(-\delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\nu \delta(\partial_\tau x^\mu) G_{\mu\nu} \\
&\quad -\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}) + \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\nu \delta(\partial_\sigma x^\mu G_{\mu\nu}) \\
&\quad +\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu})) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\,(-2\ \delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu}) \\
&\quad +2\ \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \delta(G_{\mu\nu})) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau \Bigg(-2\ \delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\mu\nu})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma \\
&\quad +2\ \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\mu\nu})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma\Bigg) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau \Bigg(-2\ \delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \underbrace{\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\mu\nu})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma}_{\mu\longleftrightarrow\gamma} \\
&\quad +2\ \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\mu\nu})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma}_{\mu\longleftrightarrow\gamma}\Bigg) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau \Bigg(-2\ \delta(\partial_\tau x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&\quad +2\ \delta(\partial_\sigma x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau \Big(-2\,\partial_\tau(\delta x^\mu)\partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu} - \partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&\quad +2\,\partial_\sigma(\delta x^\mu)\partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\Big) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\,(-2\,\partial_\tau(\delta x^\mu\ \partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu}) + 2\,\delta x^\mu\ \partial_\tau(\partial_\tau x^\nu)G_{\mu\nu} \\
&\quad +2\,\delta x^\mu\ \partial_\tau x^\nu \partial_\tau(G_{\mu\nu}) - \partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&\quad +2\,\partial_\sigma(\delta x^\mu \partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu}) - 2\,\delta x^\mu \partial_\sigma(\partial_\sigma x^\nu)G_{\mu\nu} \\
&\quad -2\,\delta x^\mu \partial_\sigma x^\nu \partial_\sigma(G_{\mu\nu}) + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\Big) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\sigma\ 2\ \left[\delta x^\mu\ \partial_\tau x^\nu G_{\mu\nu}\right]_{\tau_i}^{\tau_f} - \frac{T}{2c}\int dd\tau\ 2\ \left[\delta x^\mu \partial_\sigma x^\nu G_{\mu\nu}\right]_{\sigma_i}^{\sigma_f} \\
&\quad -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\,(2\,\delta x^\mu\ \partial_\tau(\partial_\tau x^\nu)G_{\mu\nu} + 2\,\delta x^\mu\ \partial_\tau x^\nu \partial_\tau(G_{\mu\nu}) \\
&\quad -\partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu - 2\,\delta x^\mu \partial_\sigma(\partial_\sigma x^\nu)G_{\mu\nu} \\
&\quad -2\,\delta x^\mu \partial_\sigma x^\nu \partial_\sigma(G_{\mu\nu}) + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\ \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\Big)
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

untuk suku pertama menggunakan kondisi batas pada persamaan 2.22, dan untuk suku kedua menggunakan kondisi batas

$$\delta x^\mu(\sigma_f) = \delta x^\mu(\sigma_i) = 0 \quad \text{(kondisi batas Dirichlet)} \tag{2.45}$$

persamaan (2.45) menggambarkan kondisi dawai yang kedua ujungnya terikat, sehingga variasi atau pergeseran pada kedua ujungnya bernilai nol.

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}(\sigma_i) = \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}(\sigma_f) = 0 \quad \text{(kondisi batas Neumann)} \tag{2.46}$$

persamaan (2.46) menyatakan bahwa pada dawai terbuka dengan ujung bebas, kemiringan pada kedua ujungnya sejajar dengan parameter panjang dawai.

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma}(\sigma_i) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma}(\sigma_f) \quad \text{(kondisi batas dawai tertutup)} \tag{2.47}$$

persamaan (2.47) memberikan gambaran bahwa pada dawai tertutup, kondisi pada ujung awal dan ujung akhir bernilai sama. sehingga, didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x^{\mu}} &= -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau \; \Big(2\,\partial_{\tau}(\partial_{\tau}x^{\nu})G_{\mu\nu} + 2\;\partial_{\tau}x^{\nu}\partial_{\tau}(G_{\mu\nu}) \\ & -\partial_{\tau}x^{\gamma}\partial_{\tau}x^{\nu}\;\frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^{\mu}} - 2\,\partial_{\sigma}(\partial_{\sigma}x^{\nu})G_{\mu\nu} - 2\,\partial_{\sigma}x^{\nu}\partial_{\sigma}(G_{\mu\nu}) \\ & +\partial_{\sigma}x^{\gamma}\partial_{\sigma}x^{\nu}\;\frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^{\mu}}\Big) \end{aligned} \tag{2.48}$$

dengan menggunakan prinsip aksi, dimana variasi dari aksi bernilai nol

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,\partial_{\tau}(\partial_{\tau}x^{\nu})G_{\mu\nu} + 2\;\partial_{\tau}x^{\nu}\partial_{\tau}(G_{\mu\nu}) - \partial_{\tau}x^{\gamma}\partial_{\tau}x^{\nu}\;\frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^{\mu}} \\ & -2\,\partial_{\sigma}(\partial_{\sigma}x^{\nu})G_{\mu\nu} - 2\,\partial_{\sigma}x^{\nu}\partial_{\sigma}(G_{\mu\nu}) + \partial_{\sigma}x^{\gamma}\partial_{\sigma}x^{\nu}\;\frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^{\mu}} \end{aligned} \tag{2.49}$$

persamaan (2.49) merupakan persamaan gerak dari aksi polyakov pada ruang-waktu x^{μ}

2.6 Invariansi Parameterisasi Ulang dari Aksi Polyakov

Pada persamaan aksi (2.30) digunakan parameter τ dan σ. Diperkenalkan parameter baru yang berhubungan dengan τ dan σ. Denga paramterer baru mempunyai bentuk $\widetilde{\tau} \equiv \widetilde{\tau}(\tau,\sigma)$ dan $\widetilde{\sigma} \equiv \widetilde{\sigma}(\tau,\sigma)$. Untuk mengetahui apakah aksi Polyakov invarian terhadap parameterisasi, dilakukan pengubahan parameter $\tau\sigma \to \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$

$$S_P = -\frac{T}{2c}\int d\sigma d\tau\;\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}x^{\mu}\partial_{\beta}x^{\nu}G_{\mu\nu}$$

digunakan

$$g^{\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \widetilde{\sigma}^\gamma} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \widetilde{\sigma}^\delta} \widetilde{g}^{\gamma\delta} \tag{2.50}$$

dengan $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1$ dan $\sigma^0 = \tau, \sigma^1 = \sigma$

$$\begin{aligned}
S_P &= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \sqrt{-g} \, \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \widetilde{\sigma}^\gamma} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \widetilde{\sigma}^\delta} \widetilde{g}^{\gamma\delta} \\
& \quad \left(\partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \widetilde{\sigma}^\alpha} \right) \left(\partial_\delta \widetilde{x}^\nu \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \widetilde{\sigma}^\beta} \right) G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \sqrt{-g} \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \sqrt{-\left(g_{00} g_{11} - g_{01} g_{10}\right)} \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \left(- \left(\frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \widetilde{g}_{00} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \widetilde{g}_{11} \right.\right. \\
& \quad \left.\left. - \frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \widetilde{g}_{01} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \widetilde{g}_{10} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \left(- \left(\frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \right)^2 \left(\widetilde{g}_{00} \widetilde{g}_{11} - \widetilde{g}_{01} \widetilde{g}_{10} \right) \right) \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \frac{\partial \widetilde{\sigma}^0}{\partial \sigma^0} \frac{\partial \widetilde{\sigma}^1}{\partial \sigma^1} \left(- \left(\widetilde{g}_{00} \widetilde{g}_{11} - \widetilde{g}_{01} \widetilde{g}_{10} \right) \right) \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\sigma d\tau \, \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau} \frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma} \left(- \left(\widetilde{g}_{00} \widetilde{g}_{11} - \widetilde{g}_{01} \widetilde{g}_{10} \right) \right) \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu} \\
&= -\frac{T}{2c} \int d\widetilde{\sigma} d\widetilde{\tau} \, \sqrt{-\widetilde{g}} \, \widetilde{g}^{\gamma\delta} \partial_\gamma \widetilde{x}^\mu \partial_\delta \widetilde{x}^\nu G_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Dari perhitungan diatas dapat dilihat bahwa hasil parameterisasi aksi Polyakov mempunyai bentuk yang identik dengan aksi Polyakov itu sendiri. Hal ini menunjukan bahwasannya aksi Polyakov invarian terhadap parameterisasi ulang.

2.7 Momentum dan Momentum Sudut Konservatif

Salah satu sifat utama dari lagrangian ialah dapat direduksi menjadi kuantitas yang konservatif. Kuantitas konservatif sangat berguna dalam mempelajari sistem dinamik. Kuantitas yang konservatif ini berupa momentum konjuget, yang mempunyai bentuk

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau x^\mu)} \qquad \mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x^\mu)} \tag{2.52}$$

dari persamaan (2.52) dapat ditentukan momentum empat menggunakan momentum konjuget pada parameter τ

$$P_\mu = \int d\sigma \, \mathcal{P}_\mu^\tau \tag{2.53}$$

integral terhadap σ digunakan karena momentum konjuget $\mathcal{P}_\mu^\tau$ menggunakan rapat lagrangian $\mathcal{L}$.

Pada sistem dinamik perlu diketahui besar energi dari sistem tersebut. Energi dapat ditentukan dari momentum-empat *time-like* dengan $\mu = 0$. Dikarenakan $\mu = 0$ mengindikasikan besaran yang berkaitan dengan waktu, dan pada relativitas besaran tersebut ialah energi. Maka energi dari dapat ditentukan dengan persamaan

$$E \equiv P^0 = -P_0 = -\int d\sigma \, \mathcal{P}_0^\tau \tag{2.54}$$

Momentum sudut dibutuhkan untuk kasus sistem berotasi. Momentum sudut dapat dibangun menggunakan momentum konjuget yang ditambahkan suku x^μ. Dengan perubahan kecil dari momentum sudut dapat didefinisikan dalam bentuk

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha x^\mu)} \, \delta x^\mu \tag{2.55}$$

dengan $\epsilon^{\mu\nu}$ merupakan metrik perubahan kecil terhadap momentum sudut $j_{\mu\nu}^\alpha$. Persamaan (2.55) dapat diekspresikan dalam bentuk rapat lagrangian, sehingga

$$\epsilon^{\mu\nu} j^{\alpha}_{\mu\nu} = \int d\sigma \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\mu)} \; \delta x^\mu \tag{2.56}$$

variasi dari x^μ diruas kanan, dapat dituliskan dalam bentuk metrik perubahan kecil $\epsilon^{\mu\nu}$

$$\delta x^\mu = \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.57}$$

maka,

$$\epsilon^{\mu\nu} j^{\alpha}_{\mu\nu} = \int d\sigma \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\mu)} \; \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.58}$$

Selanjutnya, dianalisa sifat dari metrik $\epsilon^{\mu\nu}$ menggunakan perubahan kecil pada transformasi lorentz. Transformasi lorentz merupakan transformasi linear dari koordinates x^μ yang menyebabkan bentuk kuadratik dari $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ invarian

$$\begin{aligned} \delta(\eta_{\mu\nu} x^{\mu\nu}) &= 0 \\ 2\eta_{\mu\nu}(\delta x^\mu) x^\nu &= 0 \\ (\epsilon^{\mu\rho} x_\rho) x_\mu &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\mu\rho} x_\rho x_\mu - \epsilon^{\rho\mu} x_\mu) x_\rho\right) &= 0 \end{aligned}$$

memberikan bahwa $\epsilon^{\mu\nu}$ merupakan metrik antisimetrik

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu} \tag{2.59}$$

Menggunakan sifat antisimetrik dari $\epsilon^{\mu\nu}$, maka persamaan (2.58) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu} j^{\alpha}_{\mu\nu} &= \int d\sigma \, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\mu)} \; \epsilon^{\mu\nu} x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\nu)} \; \epsilon^{\nu\mu} x_\mu \right) \\ \epsilon^{\mu\nu} j^{\alpha}_{\mu\nu} &= \int d\sigma \, \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\nu)} \; x_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^\mu)}_\nu \right) \end{aligned}$$

didefinisikan arus $j^{\alpha}_{\mu\nu}$ dengan menghilangkan -1 pada ruas kanan dan $\alpha = \tau$, didapatkan arus lorentz *time-like* yang ekivalen dengan memontum sudut dari dawai

$$j^{\tau}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau} x^{\nu})}\, x_{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau} x^{\mu})}\, x_{\nu} \right) \tag{2.60}$$

Suku μ dan ν merupakan bidang dua dimensi tempat dawai berputar dan bukan merupakan indek berjalan.

BAB 3

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK PADA RUANG DATAR

3.1 Aksi Polyakov pada Ruang Datar

Akan dipelajari dawai tertutup dengan menggunakan Aksi Polyakov (2.30). Dawai tertutup mempunyai *world-sheet* berbentuk silinder dengan kondisi dimana kedua ujung dawai menyambung.

$$x^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \tag{3.1}$$

dilakukan *gauge fixing* (2.41) pada *auxilliary field*, sehingga metrik *auxilliary field* diberikan dalam bentuk metrik minkowski 2-d.

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

Pada kasus ini, dipelajari dawai relativistik didalam ruang-waktu datar. Sehingga metrik ruang-waktu diberikan dalam bentuk metrik minkowski 5-d

$$G^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

dengan

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Sehingga aksi Polyakov pada persamaan (2.30) dapat dituliskan dalam bentuk

$$S_P = \int d\tau d\sigma \, \mathcal{L} \tag{3.5}$$

dengan $\mathcal{L}$ merupakan rapat lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2c} \, \eta^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \, \eta_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

Untuk menentukan energi dari dawai, digunakan momentum-empat *time-like* pada persamaan (2.55)

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int d\sigma \, \mathcal{P}^\tau_\mu \\ &= \int d\sigma \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{x}^\mu)} \\ &= -\frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left(\eta^{\tau\tau} \, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \, \eta_{\mu\nu} \right) \\ &= T \int d\sigma \, \dot{x}_\mu \end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan $\mu = 0$ untuk suku energi, maka

$$E \equiv P^0 = -P_0 = \frac{T}{c} \int d\sigma \, \dot{x}^0 \tag{3.8}$$

Persamaan ini digunakan untuk menentukan besar energi dari sistem, besar energi tersebut hanya bergantung pada koordinat waktu dari ruang-waktu x^μ Untuk menentukan momentum sudut dari dawai digunakan persamaan (2.60)

$$S_{\mu\nu} \equiv j^\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \dot{x}^\nu)} \, x_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \dot{x}^\mu)} \, x_\nu \right) \tag{3.9}$$

menggunakan rapat lagrangian pada persamaan (3.6). Ditentukan terlebih dahulu turunan lagrangian pada suku pertama dan kedua diruas kanan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \dot{x}^\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial \dot{x}^\mu)} \left(-\frac{T}{2c} \, \eta^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \, \eta_{\mu\nu} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial(\partial \dot{x}^\mu)} \left(\frac{T}{2c} \, \eta^{\tau\tau} \, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \, \eta_{\mu\nu} + \frac{T}{2c} \, \eta^{\sigma\sigma} \acute{x}^\mu \acute{x}^\nu \, \eta_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{T}{c} \dot{x}_\mu \end{aligned} \tag{3.10}$$

maka, momentum sudut dari dawai dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} \equiv j^{\tau}_{\mu\nu} = \int d\sigma\, \frac{T}{2c}\,(\dot{x}_\nu\, x_\mu - \dot{x}_\mu\, x_\nu) \tag{3.11}$$

Untuk menentukan persamaan gerak dawai pada ruang datar digunakan persamaan 2.49

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,\partial_\tau(\partial_\tau x^\nu)G_{\mu\nu} + 2\;\partial_\tau x^\nu \partial_\tau(G_{\mu\nu}) - \partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\, \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu} \\ &\quad -2\,\partial_\sigma(\partial_\sigma x^\nu)G_{\mu\nu} - 2\,\partial_\sigma x^\nu \partial_\sigma(G_{\mu\nu}) + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\, \frac{\partial(G_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

digunakan metrik ruang-waktu datar $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,\partial_\tau(\partial_\tau x^\nu)\eta_{\mu\nu} + 2\;\partial_\tau x^\nu \partial_\tau(\eta_{\mu\nu}) - \partial_\tau x^\gamma \partial_\tau x^\nu\, \frac{\partial(\eta_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu} \\ &\quad -2\,\partial_\sigma(\partial_\sigma x^\nu)\eta_{\mu\nu} - 2\,\partial_\sigma x^\nu \partial_\sigma(\eta_{\mu\nu}) + \partial_\sigma x^\gamma \partial_\sigma x^\nu\, \frac{\partial(\eta_{\gamma\nu})}{\partial x^\mu} \\ 0 &= \partial_\tau(\partial_\tau x^\nu)\eta_{\mu\nu} - \partial_\sigma(\partial_\sigma x^\nu)\eta_{\mu\nu} \\ 0 &= \partial_\tau(\partial_\tau x_\mu) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_\mu) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Untuk persamaan gerak dari variasi aksi terhadap auxilliary field $g^{\alpha\beta}$ atau biasa disebut konstrain pada aksi dikarenakan penmabahan auxilliary field *auxilliary field*

$$\begin{aligned} S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\, \left(-\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ \delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; \delta\left(-\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; \delta(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta})\,(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma(\delta\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad (-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(-g)\; g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad (-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})
\end{aligned}
$$

menggunakan $\delta(-g) = -g_{\gamma\rho}(-g)\delta g^{\gamma\rho}$, maka

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g_{\gamma\rho}(-g)\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad (-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\gamma\rho}\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad (-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\gamma\rho}\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta}\;(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})}_{\gamma\to\alpha,\rho\to\beta}\right. \\
&\quad \left. +\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\;(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})\; g^{\gamma\rho}\;(-\partial_\gamma x^\mu \partial_\rho x^\nu \eta_{\mu\nu})\right. \\
&\quad \left. +\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\;(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\;\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta})\; g^{\gamma\rho}\;(-\partial_\gamma x^\mu \partial_\rho x^\nu \eta_{\mu\nu})\right. \\
&\quad \left. +\,(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})\right) \\
0 &= \left(\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta})\; g^{\gamma\rho}\;(-\partial_\gamma x^\mu \partial_\rho x^\nu \eta_{\mu\nu})\right) \\
&\quad +\,(-\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu})
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

dilakukan *gauge fixing* pada metrik *auxilliary field* berupa metrik minkowski $g_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ $g^{\gamma\rho} = \eta^{\gamma\rho}$ dengan $\gamma, \rho = \tau, \sigma$, $\alpha\beta = \tau$, maka

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}\left(g^{\tau\tau}\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(g^{\sigma\sigma}\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ &\quad -\left(\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ &= \partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu \eta_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.14}$$

dari persamaan (3.13), jika digunakan metrik non-diagonal dengan $\alpha, \gamma = \tau$, dan $\rho, \beta = \sigma$. Maka didapatkan

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}(-g_{\tau\sigma})\, g^{\tau\sigma}\left(-\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu}\right)\right) \\ &\quad + \left(-\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu}\right) \\ &= \partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.15}$$

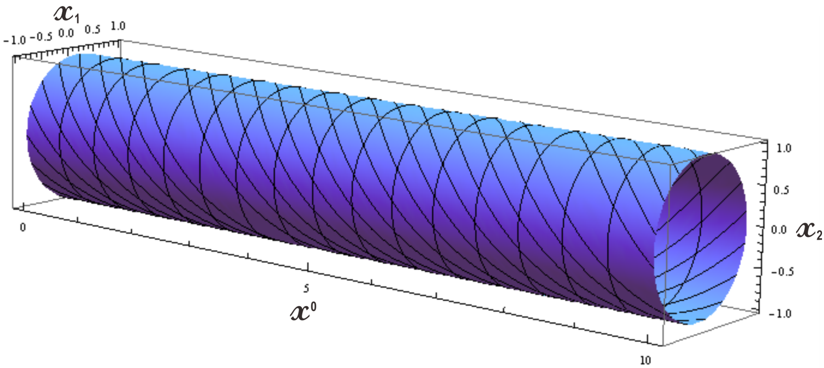
3.2 Dawai Melingkar Berputar pada dua Bidang yang Saling Tegak Lurus

Pada model dawai ini, dawai tertutup berputar terhadap waktu pada bidang (x^1, x^2) dan (x^3, x^4) yang saling tegak lurus. Ansatz dari model dawai ini ialah

$$\begin{aligned} x^0 &= \kappa\tau \\ x^1 &= a\cos(\omega\tau + \sigma) \\ x^2 &= a\sin(\omega\tau + \sigma) \\ x^3 &= a\cos(\omega\tau - \sigma) \\ x^4 &= a\sin(\omega\tau - \sigma) \end{aligned} \tag{3.16}$$

dengan a merupakan jari-jari dawai dan ω frekuensi rotasi dari dawai.

Dari ansatz dawai,didapatkan konstrain *gauge* menggunakan persamaan (3.14) dan persamaan (3.15)



Gambar 3.1: dawai berputar pada bidang (x^1, x^2)

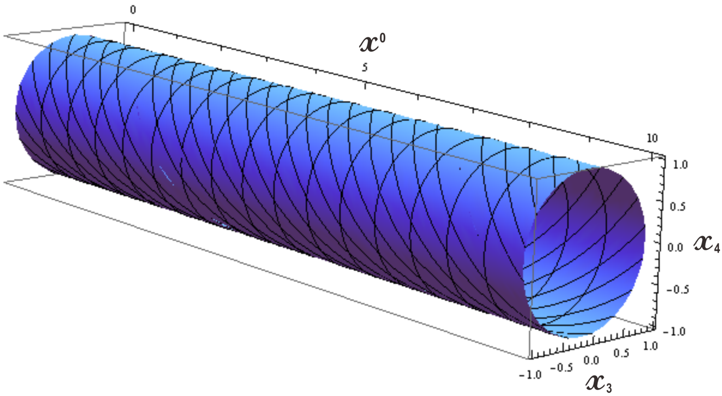
$$
\begin{aligned}
&= \partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu \eta_{\mu\nu} + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu} \\
&= -\kappa^2 + a^2\omega^2 \left(\cos^2(\omega\tau + \sigma) + \sin^2(\omega\tau + \sigma)\right) \\
&\quad + a^2\omega^2 \left(\cos^2(\omega\tau - \sigma) + \sin^2(\omega\tau - \sigma)\right) \\
&\quad + a^2 \left(\cos^2(\omega\tau + \sigma) + \sin^2(\omega\tau + \sigma)\right) + a^2 \left(\cos^2(\omega\tau - \sigma) + \sin^2(\omega\tau - \sigma)\right) \\
\kappa^2 &= 2a^2(\omega^2 + 1)
\end{aligned}
$$

jika digunakan $\omega = 1$, maka

$$\kappa = 2a \tag{3.17}$$

Untuk energi dari dawai, digunakan persamaan (3.8)

$$
\begin{aligned}
E &= T \int_0^{2\pi} d\sigma\, \partial_\tau(\kappa\tau) \\
&= T 2\pi\kappa \\
&= T 2\pi(2a)
\end{aligned} \tag{3.18}
$$



Gambar 3.2: dawai berputar pada bidang (x^3, x^4)

Momentum sudut dari dawai pada bidang (x^1, x^2) dapat ditentukan menggunakan persamaan 3.11

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{12} &= \frac{T}{2}\int d\sigma \;\; (a \cos\,(\omega\tau+\sigma)\;\omega\; a\cos\,(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad -a\sin\,(\omega\tau+\sigma)\;\omega\;(-a\sin\,(\omega\tau+\sigma))) \\
&= \frac{T}{2}\;\omega\; a^2 \int_0^{2\pi} d\sigma \\
&= \frac{T}{2}\;\omega\; a^2\; 2\pi
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang (x^3, x^4) dapat ditentukan menggunakan persamaan 3.11

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{34} &= \frac{T}{2}\int d\sigma \;\; (a \cos\,(\omega\tau-\sigma)\;\omega\; a\cos\,(\omega\tau-\sigma) \\
&\quad -a\sin\,(\omega\tau-\sigma)\;\omega\;(-a\sin\,(\omega\tau-\sigma))) \\
&= \frac{T}{2}\;\omega\; a^2 \int_0^{2\pi} d\sigma \\
&= \frac{T}{2}\;\omega\; a^2\; 2\pi
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Persamaan gerak dari dawai pada ruang-waktu x^μ dapat ditentukan menggunakan persamaan (3.12)

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau(\partial_\tau x_\mu) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_\mu) \\
&= \partial_\tau(\partial_\tau x_0) + \partial_\tau(\partial_\tau x_1) + \partial_\tau(\partial_\tau x_2) + \partial_\tau(\partial_\tau x_3) + \partial_\tau(\partial_\tau x_4) \\
&\quad -\partial_\sigma(\partial_\sigma x_0) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_1) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_2) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_3) - \partial_\sigma(\partial_\sigma x_4) \\
&= \partial_\tau(\partial_\tau \kappa\tau) + \partial_\tau(\partial_\tau a \text{ cos}(\omega\tau + \sigma)) + \partial_\tau(\partial_\tau a \text{ sin}(\omega\tau + \sigma)) \\
&\quad +\partial_\tau(\partial_\tau a \text{ cos}(\omega\tau - \sigma)) + \partial_\tau(\partial_\tau a \text{ sin}(\omega\tau - \sigma)) \\
&\quad -\partial_\sigma(\partial_\sigma \kappa\tau) - \partial_\sigma(\partial_\sigma a \text{ cos}(\omega\tau + \sigma)) - \partial_\sigma(\partial_\sigma a \text{ sin}(\omega\tau + \sigma)) \\
&\quad -\partial_\sigma(\partial_\sigma a \text{ cos}(\omega\tau - \sigma)) - \partial_\sigma(\partial_\sigma a \text{ sin}(\omega\tau - \sigma)) \\
&= 0 - a\,\omega^2 \text{cos}(\omega\tau + \sigma) - a\,\omega^2 \text{sin}(\omega\tau + \sigma) \\
&\quad -a\,\omega^2 \text{cos}(\omega\tau - \sigma) - a\,\omega^2 \text{sin}(\omega\tau - \sigma) \\
&\quad +0 + a \text{ cos}(\omega\tau + \sigma) + a \text{ sin}(\omega\tau + \sigma) \\
&\quad +a \text{ cos}(\omega\tau - \sigma) + a \text{ sin}(\omega\tau - \sigma)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Besar energi dapat diberikan dalam bentuk momentum sudut dengan menggunakan $\omega = 1$

$$E = 2\sqrt{4T\pi\mathcal{S}} \tag{3.22}$$

BAB 4

SOLUSI DAWAI RELATIVISTIK PADA RUANG $ADS_5 \times S^5$

4.1 Aksi Polyakov pada Ruang $AdS_5 \times S^5$

Ruang $AdS_5 \times S^5$ merupakan penggabungan antara anti-de Sitter 5 dimensi dengan sperical 5 dimensi, sehingga ruang ini mempunyai total 10 dimensi. Ruang $AdS_5 \times S^5$ ini memberikan interprestasi fisis menarik ketika dawai super *superstring* dipelajari dalam ruang tersebut. Pada tugas akhir ini akan dipelajari dawai klasik yang berotasi dalam ruang $AdS_5 \times S^5$ serta ditinjau energi dan momentum sudut dari dawai tersebut.

Ruang anti-de sitter merupakan ruang dengan kurvatur kuadratik konstan negatif (jari-jari negatif). Ruang ini dapat direpresentasikan sebagai hiperboloid yang berada pada permukaan $R^{2,5-1}$, sehingga dapat dituliskan dalam bentuk

$$\eta_{PQ} Y_P Y_Q = -Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 - Y_5^2 = -1 \tag{4.1}$$

dengan diberikan jari-jari dari hiperboloid ialah 1. perpindahan dalam ruang $AdS_5 \times S^5$ berikan dalam persamaan

$$ds^2 = \eta_{PQ} dY^P dY^Q \qquad \eta_{PQ} = (-1, 1, ..., 1, -1) \tag{4.2}$$

Untuk ruang spherical 5-dimensi S^5. dapat direpresentasikan pada permukaan dengan kurvatur kuadratik positif yang berada pada permukaan R^{5+1}

$$X_M X_M = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 1 \tag{4.3}$$

dengan jari-jari bernilai 1.

Bagian AdS_5 dan S^5 dari aksi dawai terikat dengan interaksinya terhadap metrik *world-sheet* 2-dimensi $g_{\alpha\beta}$. Aksi polyakov pada ruang $AdS_5 \times S^5$ merupakan penjumlahan dari aksi Polyakov pada AdS_5 dan S^5,sehingga dapat diberikan dalam bentuk

$$S = \int d\tau d\sigma \left(\mathcal{L}_{AdS_5} + \mathcal{L}_{S^5} \right) \tag{4.4}$$

dengan $\mathcal{L}_{AdS_5}$ dan $\mathcal{L}_{S^5}$ merupakan rapat lagrangian pada ruang AdS_5 dan S^5

$$\mathcal{L}_{S^5} = -\frac{T}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M \partial_\beta X_M + \Lambda\left(X_M X_M - 1\right) \tag{4.5}$$

$$\mathcal{L}_{AdS_5} = -\frac{T}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha Y^P \partial_\beta Y^Q \eta_{PQ} - \widetilde{\Lambda}\left(Y^P Y^Q \eta_{PQ} + 1\right) \tag{4.6}$$

Dengan $\widetilde{\Lambda}$ merupakan pengali lagrange untuk ruang AdS_5 dengan konstrain $Y^P Y^Q \eta_{PQ} = -1$ dan Λ merupakan pengali lagrange untuk ruang S^5 dengan konstrain $X_M X_M = 1$

Pada persamaan ini terdapat 5 persamaan gerak dari variasi aksi terhadap auxilliary field $g^{\alpha\beta}$,variasi aksi terhadap X_M, variasi aksi terhadap Y^P, variasi aksi terhadap pengali langrange $\widetilde{\Lambda}$ dan Λ

Energi dari dawai dapat ditentukan menggunakan persamaan momentum sudut-empat *time-like*. Dengan indek $\mu = 0, \nu = 5$. Hal ini dikarenakan dawai juga berputar pada bidang yang dibentuk koordinat waktu AdS_5.

$$E \equiv j^\tau_{05} \quad = \quad \int d\sigma \, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{Y}^5)}\, Y_0 - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{Y}^{0)}}\, Y_5\right) \tag{4.7}$$

dengan,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau Y^5)} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial(\dot{Y}^5)}\left(-\frac{T}{2}\sqrt{-g}\, g^{\tau\tau}\dot{Y}^5\dot{Y}^5\eta_{55} - \widetilde{\Lambda}\left(Y^5 Y^5 \eta_{55} + 1\right)\right)$$

dilakukan *gauge fixing* (2.41) pada *auxilliary field*, sehingga metrik *auxilliary field* diberikan dalam bentuk metrik minkowski 2-d.

$$\begin{aligned} &= \quad -\frac{\partial}{\partial(\partial_\tau Y^5)}\left(\frac{T}{2}\,\eta^{\tau\tau}\,\dot{Y}^5\dot{Y}^5\,\eta_{55} + \frac{T}{2}\,\eta^{\sigma\sigma}\,\acute{Y}^5\acute{Y}^5\,\eta_{55}\right) \\ &= \quad T\dot{Y}_5 \end{aligned} \tag{4.8}$$

maka, energi dari dawai diberikan dalam bentuk

$$E \equiv j^{\tau}_{05} \quad = \quad \int d\sigma \, \frac{T}{2} \left(\dot{Y}_5 \, Y_0 - \dot{Y}_0 \, Y_5 \right) \tag{4.9}$$

Momentum sudut dari dawai yang berotasi pada bidang AdS_5

$$\mathcal{S}_{PQ} \equiv j^{\tau}_{PQ} \quad = \quad \int d\sigma \, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{Y}^Q)} \, Y_P - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{Y}^P \, Y_Q} \right) \tag{4.10}$$

dengan,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{Y}^Q)} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial(\dot{Y}^Q)} \left(-\frac{T}{2} \sqrt{-g} \, g^{\tau\tau} \dot{Y}^P \dot{Y}^Q \eta_{PQ} - \widetilde{\Lambda} \left(Y^P Y^Q \eta_{PQ} + 1 \right) \right)$$

dilakukan *gauge fixing* (2.41) pada *auxilliary field*, sehingga metrik *auxilliary field* diberikan dalam bentuk metrik minkowski 2-d.

$$\begin{aligned} &= \quad -\frac{\partial}{\partial(\dot{Y}^Q)} \left(\frac{T}{2} \, \eta^{\tau\tau} \, \dot{Y}^P \dot{Y}^Q \, \eta_{PQ} + \frac{T}{2} \, \eta^{\sigma\sigma} \, \acute{Y}^P \acute{Y}^Q \, \eta_{PQ} \right) \\ &= \quad T \dot{Y}_Q \end{aligned} \tag{4.11}$$

maka, momentum sudut dawai pada ruang AdS_5 diberikan dalam bentuk

$$\mathcal{S}_{PQ} \equiv j^{\tau}_{PQ} \quad = \quad \frac{T}{2} \int d\sigma \, \left(\dot{Y}_Q \, Y_P - \dot{Y}_Q \, Y_P \right) \tag{4.12}$$

Momentum sudut dari dawai yang berotasi pada bidang S^5

$$\mathcal{J}_{MN} \equiv j^{\tau}_{MN} \quad = \quad \int d\sigma \, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{X}_N)} \, X_M - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{X}_M)} \, X_N \right) \tag{4.13}$$

dengan,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{X}^M)} = \frac{\partial}{\partial(\dot{X}_M)}\Big(-\frac{T}{2}\sqrt{-g}\; g^{\tau\tau}\dot{X}^M\dot{X}_M + \widetilde{\Lambda}\left(X_M X_M - 1\right)\Big)$$

dilakukan *gauge fixing* (2.41) pada *auxilliary field*, sehingga metrik *auxilliary field* diberikan dalam bentuk metrik minkowski 2-d.

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial(\dot{X}_M)}\Big(\frac{T}{2}\,\eta^{\tau\tau}\;\dot{X}_M\dot{X}_M + \frac{T}{2}\,\eta^{\sigma\sigma}\;\acute{X}_M\acute{X}_M\Big) \\ &= \frac{T}{2}\dot{X}_M \end{aligned} \tag{4.14}$$

maka, momentum sudut dawai pada ruang S^5 diberikan dalam bentuk

$$\mathcal{J}_{MN} \equiv j^{\tau}_{MN} = \frac{T}{2}\int d\sigma\;\Big(\dot{X}_N\,X_M - \dot{X}_M\,X_N\Big) \tag{4.15}$$

Untuk persamaan gerak dari variasi aksi terhadap auxilliary field $g^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\,\Big(-\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ} - \widetilde{\Lambda}\left(Y^P Y^Q\eta_{PQ}+1\right) \\ &\quad -\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M + \Lambda\left(X_M X_M - 1\right)\Big) \\ \delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\;\delta\left(-\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}\right. \\ &\quad \left.-\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right) \\ &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\;\delta(\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta})\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ} - \partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma(\delta\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}) \\
&\quad \left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(-g)\; g^{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad \left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)
\end{aligned}
$$

mengguanakan $\delta(-g)=-g_{\gamma\rho}(-g)\delta g^{\gamma\rho}$, maka

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g_{\gamma\rho}(-g)\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad \left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\gamma\rho}\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad \left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\gamma\rho}\delta g^{\gamma\rho})\; g^{\alpha\beta}\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)}_{\gamma\to\alpha,\rho\to\beta} \\
&\quad +\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)\Bigg) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\Bigg(\frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})\; g^{\gamma\rho}\left(-\partial_\gamma Y^P\partial_\rho Y^Q G_{PQ}-\partial_\gamma X_M\partial_\rho X_M\right) \\
&\quad +\sqrt{-g}\;\delta g^{\alpha\beta}\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\,\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta})\,g^{\gamma\rho}\left(-\partial_\gamma Y^P\partial_\rho Y^Q G_{PQ}-\partial_\gamma X_M\partial_\rho X_M\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)\right)\\
0 &= \left(\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta})\,g^{\gamma\rho}\left(-\partial_\gamma Y^P\partial_\rho Y^Q G_{PQ}-\partial_\gamma X_M\partial_\rho X_M\right)\right)\\
&\quad+\left(-\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\partial_\alpha X_M\partial_\beta X_M\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

dilakukan *gauge fixing* pada metrik *auxilliary field* berupa metrik minkowski $g_{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\beta}$ $g^{\gamma\rho}=\eta^{\gamma\rho}$ dengan $\gamma,\rho=\tau,\sigma$, $\alpha\beta=\tau$, maka

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\left(g^{\tau\tau}\partial_\tau Y^P\partial_\tau Y^Q G_{PQ}+g^{\tau\tau}\partial_\tau X_M\partial_\tau X_M\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(g^{\sigma\sigma}\partial_\sigma Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ}+g^{\sigma\sigma}\partial_\sigma X_M\partial_\sigma X_M\right)\\
&\quad-\left(\partial_\tau Y^P\partial_\tau Y^Q G_{PQ}+\partial_\tau X_M\partial_\tau X_M\right)\\
&= \partial_\tau Y^P\partial_\tau Y^Q G_{PQ}+\partial_\sigma Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ}\\
&\quad+\partial_\tau X_M\partial_\tau X_M+\partial_\sigma X_M\partial_\sigma X_M
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dari persamaan (4.16), jika digunakan metrik non-diagonal dengan $\alpha,\gamma=\tau$, dan $\rho,\beta=\sigma$. Maka didapatkan

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{2}(-g_{\tau\sigma})\,g^{\tau\sigma}\left(-\partial_\tau Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ}-\partial_\tau X_M\partial_\sigma X_M\right)\right)\\
&\quad+\left(-\partial_\tau Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ}-\partial_\tau X_M\partial_\sigma X_M\right)\\
&= \partial_\tau Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ}+\partial_\tau X_M\partial_\sigma X_M
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Untuk persamaan gerak dari variasi aksi terhadap Y^P

$$\begin{aligned}
S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(-\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\widetilde{\Lambda}\left(Y^PY^Q\eta_{PQ}+1\right)\right)\\
\delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\delta\left(-\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\partial_\alpha Y^P\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-\widetilde{\Lambda}\left(Y^PY^Q\eta_{PQ}+1\right)\right)\\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(-2\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha Y^P)\partial_\beta Y^Q G_{PQ}-2\widetilde{\Lambda}\delta(Y^P)Y^Q\eta_{PQ}\right)
\end{aligned}$$

dengan $G_{PQ} = \eta_{PQ} = (-1, 1, 1, 1, 1, -1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \left(-2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\delta Y^P\partial_\beta Y^Q\eta_{PQ})\right. \\ &\quad \left. +2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\delta(Y^P)\partial_\alpha\partial_\beta Y^Q\eta_{PQ} - 2\widetilde{\Lambda}\delta(Y^P)Y^Q\eta_{PQ}\right) \end{aligned}$$

dilakukan *gauge fixing* pada metrik *auxilliary field* berupa metrik minkowski $g_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\; g^{\gamma\rho} = \eta^{\gamma\rho}\; \sqrt{-g} = \sqrt{-detg_{\alpha\beta}} = 1$

$$\begin{aligned} = \quad & -\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; 2\; \eta^{\tau\tau}\; \partial_\tau(\delta Y^P\partial_\tau Y^Q\eta_{PQ}) \\ & -\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; 2\; \eta^{\sigma\sigma}\partial_\sigma(\delta Y^P\partial_\sigma Y^Q\eta_{PQ}) \\ & +\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(Y^P)\partial_\alpha\partial_\beta Y^Q\eta_{PQ} - 2\widetilde{\Lambda}\delta(Y^P)Y^Q\eta_{PQ}\right) \\ = \quad & -\frac{T}{2c}\int d\sigma\; 2\;\eta^{\tau\tau}\;(\delta Y^P\partial_\tau Y^Q\eta_{PQ})^{\tau_f}_{\tau_i} - \frac{T}{2c}\int d\tau\; 2\;\eta^{\sigma\sigma}(\delta Y^P\partial_\sigma Y^Q\eta_{PQ})^{\sigma_f}_{\sigma_i} \\ & +\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(Y^P)\partial_\alpha\partial_\beta Y^Q\eta_{PQ} - 2\widetilde{\Lambda}\delta(Y^P)Y^Q\eta_{PQ}\right) \end{aligned}$$

menggunakan kondisi $\delta Y^P(\tau_i) = \delta Y^P(\tau_f) = 0$ pada suku pertama, dan menggunakan kondisi dawai tertutup $Y^Q(\sigma_f) = Y^Q(\sigma_i) = 0$ pada suku kedua, maka

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(Y^P)\partial_\alpha\partial_\beta Y^Q\eta_{PQ} - 2\widetilde{\Lambda}\delta(Y^P)Y^Q\eta_{PQ}\right) \\ \frac{\delta S}{\delta Y^P} &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \left(2\;\partial_\alpha\partial^\alpha Y_P - 2\widetilde{\Lambda}Y_P\right) \\ 0 &= \partial_\alpha\partial^\alpha Y_P - \widetilde{\Lambda}Y_P \end{aligned} \tag{4.19}$$

Untuk persamaan gerak dari variasi aksi terhadap X_M

$$\begin{aligned}
S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(-\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M \partial_\beta X_M + \Lambda\left(X_M X_M - 1\right)\right) \\
\delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma \delta\left(-\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M \partial_\beta X_M + \Lambda\left(X_M X_M - 1\right)\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(-2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\delta(\partial_\alpha X_M)\partial_\beta X_M + 2\Lambda\delta(X_M X_M)\right) \\
&= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(-2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\delta X_M \partial_\beta X_M)\right. \\
&\quad \left. +2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\delta(X_M)\partial_\alpha\partial_\beta X_M + 2\Lambda\delta(X_M)X_M\right)
\end{aligned}$$

dilakukan *gauge fixing* pada metrik *auxilliary field* berupa metrik minkowski $g_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\; g^{\gamma\rho} = \eta^{\gamma\rho}\; \sqrt{-g} = \sqrt{-det g_{\alpha\beta}} = 1$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; 2\;\eta^{\tau\tau}\;\partial_\tau(\delta X_M \partial_\tau X_M) - \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\; 2\;\eta^{\sigma\sigma}\partial_\sigma(\delta X_M \partial_\sigma X_M) \\
&\quad +\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(X_M)\partial_\alpha\partial_\beta X_M + 2\Lambda\delta(X_M)X_M\right) \\
&= -\frac{T}{2c}\int d\sigma\; 2\;\eta^{\tau\tau}\;(\delta X_M \partial_\tau X_M)_{\tau_i}^{\tau_f} - \frac{T}{2c}\int d\tau\; 2\;\eta^{\sigma\sigma}(\delta X_M \partial_\sigma X_M)_{\sigma_i}^{\sigma_f} \\
&\quad +\frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(X_M)\partial_\alpha\partial_\beta X_M + 2\Lambda\delta(X_M)X_M\right)
\end{aligned}$$

menggunakan kondisi $\delta Y^P(\tau_i) = \delta Y^P(\tau_f) = 0$ pada suku pertama, dan menggunakan kondisi dawai tertutup $Y^Q(\sigma_f) = Y^Q(\sigma_i) = 0$ pada suku kedua, maka

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(2\;\eta^{\alpha\beta}\delta(X_M)\partial_\alpha\partial_\beta X_M + 2\Lambda\delta(X_M)X_M\right) \\
\frac{\delta S}{\delta X_M} &= \frac{T}{2c}\int d\tau d\sigma\left(2\;\partial_\alpha\partial^\alpha X_M + 2\Lambda X_M\right) \\
0 &= \partial_\alpha\partial^\alpha X_M + \Lambda X_M
\end{aligned} \tag{4.20}$$

dari persamaan (4.20) dan (4.3), bisa didapatkan bentuk dari pengali lagrange pada ruang S^5

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\alpha \partial^\alpha X_M + \Lambda X_M \\
0 &= X_M(\partial_\alpha \partial^\alpha X_M + \Lambda X_M) \\
0 &= X_M \partial_\alpha \partial^\alpha X_M + X_M \Lambda X_M) \\
0 &= \partial_\alpha (X_M \partial^\alpha X_M) - \partial^\alpha X_M \partial_\alpha X_M + X_M \Lambda X_M) \\
-\Lambda &= \partial_\alpha (\underbrace{X_M \partial^\alpha X_M}_{0}) - \partial^\alpha X_M \partial_\alpha X_M \\
\Lambda &= \partial^\alpha X_M \partial_\alpha X_M
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Dari persamaan (4.19) dan (4.1), bisa didapatkan bentuk dari pengali lagrange pada ruang S^5

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\alpha \partial^\alpha Y_P - \widetilde{\Lambda} Y_P \\
0 &= Y^P(\partial_\alpha \partial^\alpha Y_P - \widetilde{\Lambda} Y_P) \\
0 &= Y^P \partial_\alpha \partial^\alpha Y_P + X_P \widetilde{\Lambda} X_P) \\
0 &= \partial_\alpha (Y^P \partial^\alpha Y_P) - \partial^\alpha Y_P \partial_\alpha Y^P + Y^P \widetilde{\Lambda} Y_P) \\
-\widetilde{\Lambda} &= \partial_\alpha (\underbrace{Y_P \partial^\alpha Y_P}_{0}) - \partial^\alpha Y_P \partial_\alpha Y^P \\
\widetilde{\Lambda} &= \partial^\alpha Y_P \partial_\alpha Y^P
\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2 Dawai Melingkar Berputar pada $R_t \times S^5$ bagian dari $AdS_5 \times S^5$

Pada model ini, dawai melingkar berputar pada S^3 dengan radius $a \leq 1$ di dalam S^5 dengan radius 1 Ansatz

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \cos\,(k\tau) && Y_5 = \sin\,(k\tau) \\
&X_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\,(m(\tau+\sigma)) && X_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\,(m(\tau+\sigma)) \\
&X_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\,(m(\tau-\sigma)) && X_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\,(m(\tau-\sigma)) \\
&X_5 + iX_6 = \sqrt{1-a} &&
\end{aligned} \tag{4.23}$$

k merupakan frekuensi rotasi dawai pada bidang Y_0Y_1, m merupakan frekuensi rotasi pada bidang S^5 dan juga memberikan banyak lilitan dawai.

Energi dari dawai dapat dihitung menggunakan persamaan (4.9)

$$\begin{aligned}
E \equiv \mathcal{S}_{05} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(Y_0\dot{Y}_5 - Y_5\dot{Y}_0\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,(\cos\,(k\tau)\,k\,\cos\,(k\tau) - \sin\,(k\tau)(-\sin\,(k\tau))) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,k\left(\cos^2(k\tau) + \sin^2(k\tau)\right) \\
&= T\pi k
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang X_1 dan X_2 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.15)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{12} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1\right)\\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(m(\tau+\sigma)\right)m\,\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(m(\tau+\sigma)\right)\right.\\
&\quad\left. -\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(m(\tau+\sigma)\right)m\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(m(\tau+\sigma)\right)\right)\right)\\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, m\frac{a^2}{2}\left(\cos^2\left(m(\tau+\sigma)\right)+\sin^2\left(m(\tau+\sigma)\right)\right)\\
&= \frac{a^2}{2}T\pi m
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang X_3 dan X_4 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.15)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{34} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1\right)\\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(m(\tau-\sigma)\right)m\,\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(m(\tau-\sigma)\right)\right.\\
&\quad\left. -\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(m(\tau-\sigma)\right)m\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(m(\tau-\sigma)\right)\right)\right)\\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\frac{a^2}{2}\left(\cos^2\left(m(\tau-\sigma)\right)+\sin^2\left(m(\tau-\sigma)\right)\right)\\
&= \frac{a^2}{2}T\pi m
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Pengali lagrange pada ruang AdS_5 diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda} &= \partial_\alpha Y^P\partial^\alpha Y_P\\
&= \partial_\tau Y^0\partial^\tau Y_0 + \partial_\sigma Y^0\partial^\sigma Y_0 + \partial_\tau Y^5\partial^\tau Y_5 + \partial_\sigma Y^5\partial^\sigma Y_5\\
&= k^2\sin^2(k\tau) + 0 + k^2\cos^2(k\tau) + 0\\
&= k^2
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Pengali lagrange pada ruang S^5 dari persamaan (4.21)diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \partial_\alpha X_M \partial^\alpha X_M \\
&= -\partial_\tau X_1 \partial^\tau X_1 - \partial_\tau X_2 \partial^\tau X_2 - \partial_\tau X_3 \partial^\tau X_3 - \partial_\tau X_4 \partial^\tau X_4 \\
&\quad +\partial_\sigma X_1 \partial^\sigma X_1 + \partial_\sigma X_2 \partial^\sigma X_2 + \partial_\sigma X_3 \partial^\sigma X_3 + \partial_\sigma X_4 \partial^\sigma X_4 \\
&= -\frac{a^2}{2} m^2 \sin^2 m(\tau+\sigma) - \frac{a^2}{2} m^2 \cos^2 m(\tau+\sigma) \\
&\quad -\frac{a^2}{2} m^2 \sin^2 m(\tau-\sigma) - \frac{a^2}{2} m^2 \cos^2 m(\tau-\sigma) \\
&\quad +\frac{a^2}{2} m^2 \sin^2 m(\tau+\sigma) + \frac{a^2}{2} m^2 \cos^2 m(\tau+\sigma) \\
&\quad +\frac{a^2}{2} m^2 \sin^2 m(\tau-\sigma) + \frac{a^2}{2} m^2 \cos^2 m(\tau-\sigma) \\
&= m^2 \, \frac{a^2}{2}(-1-1+1+1) \\
&= 0 \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Persamaan gerak dari dawai terhadap *auxilliary field*

$$\begin{aligned}
0 &= -\dot{Y}_0 \dot{Y}_0 - \dot{Y}_5 \dot{Y}_5 + \dot{X}_1 \dot{X}_1 + \dot{X}_2 \dot{X}_2 + \dot{X}_3 \dot{X}_3 + \dot{X}_4 \dot{X}_4 \\
&\quad \acute{X}_1 \acute{X}_1 + \acute{X}_2 \acute{X}_2 + \acute{X}_3 \acute{X}_3 + \acute{X}_4 \acute{X}_4 \\
&= -k^2(\sin^2 k\tau + \cos^2 k\tau) + \frac{a^2}{2} m^2 \left(\cos^2 m(\tau+\sigma) + \sin^2 m(\tau+\sigma)\right) \\
&\quad +\frac{a^2}{2} m^2 \left(\cos^2 m(\tau+\sigma) + \sin^2 m(\tau+\sigma)\right) \\
&\quad +\frac{a^2}{2} m^2 \left(\cos^2 m(\tau-\sigma) + \sin^2 m(\tau-\sigma)\right) \\
&\quad +\frac{a^2}{2} m^2 \left(\cos^2 m(\tau-\sigma) + \sin^2 m(\tau-\sigma)\right) \\
k^2 &= 2a^2 m^2
\end{aligned} \qquad (4.29)$$

Persamaan energi dapat dituliskan dalam bentuk momentum sudut pada persamaan (4.25) dan (4.26) dengan $J_{12} = J_{34} \equiv J$ menggunakan hubungan (4.29)

$$E = T\pi\, k = \sqrt{4m\, T\pi\, J} \tag{4.30}$$

solusi energi ini identik dengan solusi energi dawai berputar di ruang datar pada persamaan (3.22)

4.3 Dawai Melingkar Berputar pada $S^3 \supset S^5$

Pada model dawai ini, dawai melingkar dan berputar dengan dua momentum sudut yang sama pada $S^3 \supset S^5$. Model dawai ini identik dengan dawai pada persamaan (4.23), dimana $a = 1$ dan $\omega = m$. Ansatz dari dawai ini diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \cos\,(k\tau) && Y_5 = \sin\,(k\tau) \\
&X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\,(\omega\tau + m\sigma) && X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\,(\omega\tau + m\sigma) \\
&X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\,(\omega\tau - m\sigma) && X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\,(\omega\tau - m\sigma) \\
&X_5 = X_6 = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Energi dari dawai dapat dihitung menggunakan persamaan (4.9)

$$\begin{aligned}
E \equiv \mathcal{S}_{05} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(Y_0\dot{Y}_5 - Y_5\dot{Y}_0\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,(\cos\,(k\tau)\,k\,\cos\,(k\tau) - \sin\,(k\tau)(-\sin\,(k\tau))) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,k\left(\cos^2(k\tau) + \sin^2(k\tau)\right) \\
&= T\pi\,k
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang X_1 dan X_2 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.15)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{12} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1 \right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{cos }(\omega\tau + m\sigma)\;\omega\;\frac{1}{-}2\sqrt{2}\text{cos }(\omega\tau + m\sigma) \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sin }(\omega\tau + m\sigma)\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sin }(\omega\tau + m\sigma)\right)\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\;\omega\;\frac{1}{2}\left(\text{cos}^2\;(\omega\tau + m\sigma) + \text{sin}^2\;(\omega\tau + m\sigma)\right) \\
&= \frac{1}{2}T\pi\;\omega \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang X_3 dan X_4 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.15)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{34} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1 \right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{cos }(\omega\tau - m\sigma)\;\omega\;\frac{1}{\sqrt{2}}\text{cos }(\omega\tau - m\sigma) \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sin }(\omega\tau - m\sigma)\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sin }(\omega\tau - m\sigma)\right)\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\;\omega\;\frac{1}{2}\left(\text{cos}^2\;(\omega\tau - m\sigma) + \text{sin}^2\;(\omega\tau - m\sigma)\right) \\
&= \frac{1}{2}T\pi\;\omega \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

persamaan gerak dari persamaan (4.17) yang merupakan variasi aksi terhadap $g^{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau Y^P \partial_\tau Y^Q G_{PQ} + \partial_\sigma Y^P \partial_\sigma Y^Q G_{PQ} \\
&\quad + \partial_\tau X_M \partial_\tau X_M + \partial_\sigma X_M \partial_\sigma X_M \\
0 &= \partial_\tau Y^0 \partial_\tau Y^0 (-1) + \partial_\tau Y^5 \partial_\tau Y^5 (-1) \\
&\quad + \partial_\tau X_1 \partial_\tau X_1 + \partial_\tau X_2 \partial_\tau X_2 + \partial_\tau X_3 \partial_\tau X_3 + \partial_\tau X_4 \partial_\tau X_4 \\
&\quad + \partial_\sigma X_1 \partial_\sigma X_1 + \partial_\sigma X_2 \partial_\sigma X_2 + \partial_\sigma X_3 \partial_\sigma X_3 + \partial_\sigma X_4 \partial_\sigma X_4 \\
0 &= -k^2(\sin^2(k\tau)) - k^2(\cos^2(k\tau)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2(\omega\tau + m\sigma) + \frac{1}{2}\,\omega^2 \cos^2(\omega\tau + m\sigma) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2(\omega\tau - m\sigma) + \frac{1}{2}\,\omega^2 \cos^2(\omega\tau - m\sigma) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,m^2 \sin^2(\omega\tau + m\sigma) + \frac{1}{2}\,m^2 \cos^2(\omega\tau + m\sigma) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,m^2 \sin^2(\omega\tau - m\sigma) + \frac{1}{2}\,m^2 \cos^2(\omega\tau - m\sigma) \\
0 &= -k^2 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 \\
k^2 &= m^2 + \omega^2
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

jika digunakan persamaan gerak ini pada solusi $E \equiv S_{05}$, maka

$$
\begin{aligned}
E &= \sqrt{m^2 + \omega^2}\, T\, \pi \\
&= \sqrt{m^2 + \frac{(2J)^2}{T^2\, \pi^2}}\, T\, \pi \\
&= \sqrt{T^2\, \pi^2\, m^2 + (2J)^2}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

untuk dawai berputar dengan sangat cepat $J >> 1$

$$
E = 2J + \frac{T^2\, \pi^2\, m^2}{2(2J)} - \frac{(T^2\, \pi^2\, m^2)^2}{8(2J)^3} + O\left(\frac{T^6\, \pi^6}{J^5}\right) \tag{4.37}
$$

4.4 Dawai Melingkar Berputar hanya pada AdS_5

Pada model dawai ini, dawai berputar pada ruang AdS_5 yang mempunyai jari-jari r. Dawai berputar pada dua bidang yang dibentuk koordinat ruang AdS_5 dan bidang tersebut saling tegak lurus. Ansatz dari model dawai ini

$$\begin{array}{ll} Y_0 = \sqrt{1+2r^2}\cos\,(k\tau) & Y_5 = \sqrt{1+2r^2}\sin\,(k\tau) \\ Y_1 = r\,\cos\,(\omega\tau+\sigma) \quad Y_2 = r\,\sin\,(\omega\tau+\sigma) & \\ Y_3 = r\,\cos\,(\omega\tau-\sigma) \quad Y_4 = r\,\sin\,(\omega\tau-\sigma) & \end{array} \tag{4.38}$$

Energi dari dawai dapat dihitung menggunakan persamaan (4.9)

$$\begin{aligned} E \equiv S_{05} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(Y_0\dot{Y}_5 - Y_5\dot{Y}_0\right) \\ &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,\big((1+2r^2)\cos\,(k\tau)\;k\,\cos\,(k\tau) \\ &\quad -(1+2r^2)\sin\,(k\tau)(-\sin\,(k\tau))\big) \\ &= \frac{T}{2}\,(1+2r^2)\int_0^{2\pi} d\sigma\;k\left(\cos^2(k\tau)+\sin^2(k\tau)\right) \\ &= T\pi\,(1+2r^2)\;k \end{aligned} \tag{4.39}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang Y_1 dan Y_2 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{12} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(Y_1\dot{Y}_2 - Y_2\dot{Y}_1\right) \\ &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\; r^2\Big(\cos\,(\omega\tau+\sigma)\;\omega\;\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\,(\omega\tau+\sigma) \\ &\quad -\sin\,(\omega\tau+\sigma)\omega\,(-\sin\,(\omega\tau+\sigma))\Big) \\ &= \frac{T}{2}r^2\int_0^{2\pi} d\sigma\;\omega\;\left(\cos^2\,(\omega\tau+\sigma)+\sin^2\,(\omega\tau+\sigma)\right) \\ &= r^2 T\,\pi\,\omega \end{aligned} \tag{4.40}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang Y_3 dan Y_4 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.12)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{34} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(Y_3\dot{Y}_4 - Y_4\dot{Y}_3\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, r^2 \Big(\cos\,(\omega\tau-\sigma)\,\omega\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\,(\omega\tau-\sigma) \\
&\quad -\sin\,(\omega\tau-\sigma)\omega\,(-\sin\,(\omega\tau-\sigma))) \\
&= \frac{T}{2}r^2\int_0^{2\pi} d\sigma\,\omega\,\left(\cos^2\,(\omega\tau-\sigma)+\sin^2\,(\omega\tau-\sigma)\right) \\
&= r^2 T\pi\omega
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Persamaan gerak dari persamaan (4.17) (variasi aksi terhadap $g^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau Y^P\partial_\tau Y^Q G_{PQ} + \partial_\sigma Y^P\partial_\sigma Y^Q G_{PQ} \\
&\quad +\partial_\tau X_M\partial_\tau X_M + \partial_\sigma X_M\partial_\sigma X_M \\
0 &= \partial_\tau Y^0\partial_\tau Y^0(-1) + \partial_\tau Y^5\partial_\tau Y^5(-1) \\
&\quad +\partial_\tau Y_1\partial_\tau Y_1 + \partial_\tau Y_2\partial_\tau Y_2 + \partial_\tau Y_3\partial_\tau Y_3 + \partial_\tau Y_4\partial_\tau Y_4 \\
&\quad +\partial_\sigma Y_1\partial_\sigma Y_1 + \partial_\sigma Y_2\partial_\sigma Y_2 + \partial_\sigma Y_3\partial_\sigma Y_3 + \partial_\sigma Y_4\partial_\sigma Y_4 \\
0 &= -(1+2r^2)k^2(\sin^2(k\tau)) - (1+2r^2)k^2(\cos^2(k\tau)) \\
&\quad +\frac{1}{2}\,\omega^2\,\sin^2(\omega\tau+\sigma) + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\cos^2(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad +\frac{1}{2}\,\omega^2\,\sin^2(\omega\tau-\sigma) + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\cos^2(\omega\tau-m\sigma) \\
&\quad +\frac{1}{2}\,\sin^2(\omega\tau+\sigma) + \frac{1}{2}\,m^2\,\cos^2(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad +\frac{1}{2}\,\sin^2(\omega\tau-\sigma) + \frac{1}{2}\,\cos^2(\omega\tau-\sigma) \\
0 &= -(1+2r^2)k^2 + r^2\omega^2 + r^2\omega^2 + r^2 + r^2 \\
k^2(1+2r^2) &= 2r^2 + 2r^2\omega^2
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Pengali lagrange pada ruang AdS_5 (4.22)diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda} &= \partial_\alpha Y^P \partial^\alpha Y_P \\
&= \partial_\tau Y^0 \partial^\tau Y_0 + \partial_\sigma Y^0 \partial^\sigma Y_0 + \partial_\tau Y^5 \partial^\tau Y_5 + \partial_\sigma Y^5 \partial^\sigma Y_5 \\
&\quad -\partial_\tau Y^1 \partial^\tau Y_1 + \partial_\sigma Y^1 \partial^\sigma Y_1 - \partial_\tau Y^2 \partial^\tau Y_2 + \partial_\sigma Y^2 \partial^\sigma Y_2 \\
&\quad -\partial_\tau Y^3 \partial^\tau Y_3 + \partial_\sigma Y^3 \partial^\sigma Y_3 - \partial_\tau Y^4 \partial^\tau Y_4 + \partial_\sigma Y^4 \partial^\sigma Y_4 \\
&= (1+2r^2)k^2(\cos^2(k\tau) + \sin^2(k\tau)) \\
&\quad -r^2\omega^2(\cos^2(\omega\tau+\sigma) + \sin^2(\omega\tau+\sigma)) - r^2\omega^2(\cos^2(\omega\tau+\sigma) + \sin^2(\omega\tau+\sigma)) \\
&\quad +r^2(\cos^2(\omega\tau-\sigma) + \sin^2(\omega\tau-\sigma)) + r^2(\cos^2(\omega\tau-\sigma) + \sin^2(\omega\tau-\sigma)) \\
&= (1+2r^2)k^2 - 2r^2\omega^2 + 2r^2 \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan hubungan antara k dengan r, digunakan persamaan gerak dawai terhadap Y^0 pada ruang AdS_5,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\alpha \partial^\alpha Y_0 - \widetilde{\Lambda} Y_0 \\
0 &= -\omega^2 - \widetilde{\Lambda} \\
0 &= -\omega^2 - (1+2r^2)k^2 + 2r^2\omega^2 - 2r^2
\end{aligned}$$

menggunakan persamaan (4.42), maka didapatkan

$$\begin{aligned}
0 &= 2k^2r^2 - k^2 - 2k^2r^2 + 4r^2 \\
r^2 &= \frac{1}{4}k^2 \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Momentum sudut dari dawai dapat dituliskan dalam fungsi k dengan menggunakan $r^2 = \frac{k^2}{2}$ dan $\omega = \sqrt{k^2+1}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_{34} \equiv \mathcal{S} = &= \frac{1}{4}k^2\sqrt{k^2+1} \\
0 &= k^6 + k^2 - 16S^2
\end{aligned} \qquad (4.45)$$

dengan melakukan ekspansi terhadap k dengan limit $\mathcal{S} << 1$

$$k = \sqrt{\mathcal{S}} - 2\mathcal{S}^{3/2} + 9\mathcal{S}^{9/2} + ... \qquad (4.46)$$

selanjutnya disubtitusi nilai k pada persamaan 4.46 kedalam bentuk energi

$$\begin{aligned} E &= T\pi(1+2r^2)\,k \\ &= T\pi(1+\frac{k^2}{2})\,k \\ &= 2\sqrt{T\pi\mathcal{S}}\left(1+\frac{\mathcal{S}}{T\pi}-\frac{3\mathcal{S}^2}{2T^2\pi^2}+O\left(\frac{\mathcal{S}^3}{T^3\pi^3}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.47}$$

persamaan energi ini menunjukan energi dari dawai pada dawai yang berputar sangat lambat. Jika diambil suku pertama dari solusi energi diatas, didapatkan hasil yang identik dengan solusi energi dawai berputar di ruang datar pada persamaan (3.22)

4.5 Dawai Melingkar Berputar pada AdS_5 dan S^5

Pada model dawai ini, dawai melingkar berputar pada bidang yang dibentuk oleh ruang AdS_5 dan ruang S^5. Dawai ini mempunyai ansatz

$$\begin{aligned} &Y_0=\sqrt{1+r^2}\cos\,(k\tau) \qquad\qquad Y_5=\sqrt{1+2r^2}\sin\,(k\tau) \\ &Y_1=r\,\cos\,(\omega\tau+\sigma) \quad Y_2=r\,\sin\,(\omega\tau+\sigma) \\ &X_3=a\,\cos\,(w\tau-\sigma) \quad X_4=a\,\sin\,(w\tau-\sigma) \\ &X_5+iX_6=\sqrt{1-a^2} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Energi dari dawai dapat dihitung menggunakan persamaan (4.9)

$$\begin{aligned} E\equiv S_{05} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(Y_0\dot{Y}_5-Y_5\dot{Y}_0\right) \\ &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\,\big((1+2r^2)\cos\,(k\tau)\,k\cos\,(k\tau) \\ &\quad -(1+r^2)\sin\,(k\tau)(-\sin\,(k\tau))\big) \\ &= \frac{T}{2}\,(1+r^2)\int_0^{2\pi} d\sigma\,k\left(\cos^2(k\tau)+\sin^2(k\tau)\right) \\ &= T\pi(1+r^2)\,k \end{aligned}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang Y_1 dan Y_2 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.12)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{12} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(Y_1\dot{Y}_2 - Y_2\dot{Y}_1\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, r^2 \left(\text{cos}\,(\omega\tau+\sigma)\,\omega\,\text{cos}\,(\omega\tau+\sigma)\right. \\
&\quad \left. -\text{sin}\,(\omega\tau+\sigma)\omega\,(-\text{sin}\,(\omega\tau+\sigma))\right) \\
&= \frac{T}{2}r^2\int_0^{2\pi} d\sigma\,\omega\,\left(\text{cos}^2\,(\omega\tau+\sigma)+\text{sin}^2\,(\omega\tau+\sigma)\right) \\
&= r^2 T\pi\omega
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Momentum sudut dari dawai pada bidang X_1 dan X_2 dapat dihitung menggunakan persamaan (4.15)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{12} &= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1\right) \\
&= \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, a^2 \left(\text{cos}\,(\omega\tau-\sigma)\,\omega\,\text{cos}\,(\omega\tau-\sigma)\right. \\
&\quad \left. -\text{sin}\,(\omega\tau-\sigma)\omega\,(-\text{sin}\,(\omega\tau-\sigma))\right) \\
&= \frac{T}{2}a^2\int_0^{2\pi} d\sigma\,\omega\,\left(\text{cos}^2\,(\omega\tau-\sigma)+\text{sin}^2\,(\omega\tau-\sigma)\right) \\
&= a^2 T\pi
\end{aligned} \tag{4.50}$$

persamaan gerak dari persamaan (4.18) variasi aksi terhadap $g^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau Y^P \partial_\sigma Y^Q G_{PQ} + \partial_\tau X_M \partial_\sigma X_M \\
0 &= \partial_\tau Y^0 \partial_\sigma Y^0(-1) + \partial_\tau Y^5 \partial_\sigma Y^5(-1) + \partial_\tau Y^1 \partial_\sigma Y^1(1) \\
&\quad + \partial_\tau Y^2 \partial_\sigma Y^1(2) + \partial_\tau X_1 \partial_\sigma X_1 + \partial_\tau X_2 \partial_\sigma X_2 \\
&= -0 - 0 + r^2\omega\,\text{sin}^2(\omega\tau+\sigma) + r^2\omega\,\text{cos}^2(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad - a^2 sin^2(\tau-\sigma) - a^2 cos^2(\tau-\sigma) \\
&= 2r^2\omega - 2a^2 \\
r^2\omega &= a^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

persamaan gerak dari persamaan (4.17) variasi aksi terhadap $g^{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau Y^P \partial_\tau Y^Q G_{PQ} + \partial_\sigma Y^P \partial_\sigma Y^Q G_{PQ} \\
&\quad + \partial_\tau X_M \partial_\tau X_M + \partial_\sigma X_M \partial_\sigma X_M \\
0 &= \partial_\tau Y^0 \partial_\tau Y^0 (-1) + \partial_\tau Y^5 \partial_\tau Y^5 (-1) \\
&\quad + \partial_\tau Y_1 \partial_\tau Y_1 + \partial_\tau Y_2 \partial_\tau Y_2 + \partial_\tau X_1 \partial_\tau X_1 + \partial_\tau X_2 \partial_\tau X_2 \\
&\quad + \partial_\sigma Y_1 \partial_\sigma Y_1 + \partial_\sigma Y_2 \partial_\sigma Y_2 + \partial_\sigma X_1 \partial_\sigma X_1 + \partial_\sigma X_2 \partial_\sigma X_2 \\
0 &= -(1+r^2)k^2(\sin^2(k\tau)) - (1+r^2)k^2(\cos^2(k\tau)) \\
&\quad + r^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau+\sigma) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad + a^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau-\sigma) + a^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau-\sigma) \\
&\quad + a^2 \sin^2(\omega\tau+\sigma) + a^2 \cos^2(\omega\tau+\sigma) \\
&\quad + a^2 \sin^2(\omega\tau-\sigma) + a^2 \cos^2(\omega\tau-\sigma) \\
0 &= -(1+r^2)k^2 + r^2\omega^2 + r^2 + a^2 + a^2 \\
k^2(1+r^2) &= r^2(\omega^2+1) + 2a^2
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan persamaan $a^2 = r^2\omega$, maka

$$
\begin{aligned}
k^2(1+r^2) &= r^2\omega^2 + r^2 + 2r^2\omega \\
k^2 + k^2r^2 &= r^2(\omega^2 + 1 + 2\omega) \\
k^2 &= r^2(\omega^2 + 1 + 2\omega - 2k^2)
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan persamaan $\omega^2 = k^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
k^2 &= r^2(k^2 + 1 + 1 + 2\sqrt{k^2+1} - k^2) \\
k^2 &= r^2(2 + 2\sqrt{k^2+1}) \\
r^2 &= \frac{k^2}{2(1+\sqrt{k^2+1})}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

jika persamaan $r^2 = \frac{k^2}{2(1+\sqrt{k^2+1})}$ di subtitusi kembali ke persamaan $S =$

$r^2\omega$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{k^2}{2(1+\sqrt{k^2+1})}\sqrt{k^2+1} \\
k^2\sqrt{k^2+1} &= 2S + 2S\sqrt{k^2+1}
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

solusi untuk k

$$
k = \pm\sqrt{2S - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8S+1}} \tag{4.54}
$$

Tanda $\pm$ pertama diambil positif, karena nilai energi harus bernilai positif. Tanda $\pm$ kedua diambil positif, karena nilai dibawah akar harus dalam bentuk real.

Untuk dapat menentukan nilai E dalam pendekatan dawai berputar cepat dan lambat, persamaan E diekspresikan dalam fungsi S, maka

$$
\begin{aligned}
E &= T\pi(1+r^2)\,k \\
&= T\pi\left(k + \frac{kS}{\omega}\right) \\
&= T\pi\,k\left(1 + \frac{S}{\sqrt{k^2+1}}\right)
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

dengan menggunakan software *mathematica* didapatkan solusi E untuk dawai berputar sangat cepat $S >> 1$

$$
E = T\pi\left(S + \sqrt{2S} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8\sqrt{2}\sqrt{S}} + \frac{1}{32S} - O\left(\left(\frac{1}{S}\right)^{3/2}\right)\right) \tag{4.56}
$$

untuk dawai yang berputar dengan sangat lambat $S << 1$

$$
E = \sqrt{4T\,\pi S}\left(1 + \frac{S}{2T\pi} - \frac{5S^2}{8(T\pi)^2} + O\left(\frac{S^3}{(T\pi)^3}\right)\right) \tag{4.57}
$$

Jika diambil suku pertama dari solusi energi pada dawai berputar sangat lambat, didapatkan hasil yang identik dengan solusi energi dawai berputar di ruang datar pada persamaan (3.22). Sedangkan, hasil dari solusi energi pada dawai berputar sangat cepat tidak memberikan bentuk fisis apapun

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dalam tugas tugas akhir ini, didapatkan kesimpulan

1. Telah diterapkan dawai relativistik menggunakan aksi Polyakov dalam ruang waktu datar pada model dawai melingkar yang berputar pada dua bidang yang saling tegak lurus. Selanjutnya, didapatkan energi, momentum sudut, dan persamaan gerak dari dawai tersebut.

2. Telah diterapkan dawai relativistik menggunakan aksi Polyakov dalam ruang waktu $AdS_5 \times S^5$ pada model dawai Melingkar pada $R_t \times S^5$ bagian dari $AdS_5 \times S^5$, dawai Melingkar pada $S^3 \supset S^5$, dawai Melingkar Berputar hanya pada AdS_5, dan dawai Melingkar Berputar pada AdS_5 dan S^5. Lagrangian dari aksi Polyakov dalam ruang waktu $AdS_5 \times S^5$ mendapatkan suku tambahan berupa konstrain dari ruang $AdS_5 \times S^5$. Karena penambahan konstrain, suku tersebut dikalikan dengan pengali lagrange. Didapatkan 2 persamaan gerak dari variasi aksi Polyakov terhadap ruang AdS_5, ruang S^5, dan dua konstrain dari variasi aksi terhadap *auxilliary field*. Selanjutnya, didapatkan energi, momentum sudut, dan persamaan gerak dari 4 model tersebut. Pada dawai di dalam ruang waktu $AdS_5 \times S^5$, besar energi dapat diberikan dalam bentuk momentum sudut menggunakan empat persamaan gerak dan dua konstrain. Pada model dawai melingkar berputar pada AdS_5 dan S^5, dawai yang berputar pada ruang AdS_5 juga terikat dengan perputarannya di ruang S^5. Sehingga besar momentum sudutnya bernilai sama. Energi pada dawai melingkar berputar pada AdS_5 dan S^5 mempunyai bentuk polinomial, dan dapat dilakukan pendekatan untuk mencari besar energi pada saat berputar sangat cepat dan berputar sangat lambat. Pada dawai yang berputar sangat lambat, didapatkan energi yang identik terhadap solusi energi dawai berputar di ruang datar dengan penambahan faktor bernilai 2.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, bisa dilakukan pengerjaan pada dawai relativistik yang sudah terkuantisasi. Kuantisasi yang dapat dilakukan bisa berupa kuantisasi kovariant, atau kuantisasi *light-cone*

DAFTAR PUSTAKA

[1] B. Zwiebach, *A First Course In String Theory*, Cambridge University Press, 2009

[2] B. Hatfield, *Quantum Field Theory Of Point Particles And Strings*, Avalon Publishing, 1998

[3] D. McMahon, *String Theory Demystified*, McGraw Hill Professional, 2008

[4] K. Fujikawa, 1988, Phys. Lett. B 213

[5] L. McAllister, 2010, Notes on String Theory from Liam McAllister Physics 7683,Cornel University, New York, United Stated of America

[6] B. Hattfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Perseus Books, 1991

[7] A.A Tseytlin, 2010, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1*, Imperial College London, arXiv:1012.3982

[8] S. Frolov, A.A Tseytlin, 2003, Nucl.Phys. B668, arXiv:hep-th/0304255

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB A

LAMPIRAN

A.1 Dawai Non-Relativistik

Dawai ialah objek 1 dimensi yang dapat berisolasi terhadap titik setimbangnya. Arah sepanjang dawai disebut arah longitudinal dan arah tegak lurus dengan dawai disebut arah transversal. Dawai non-relativistik merupakan dawai yang dapat bergerak dengan kecepatan yang jauh lebih kecil jika dibandingkan dengan kecepatan cahaya $v << c$ terhadap suatu kerangka acuan.
Dimisalkan dawai dengan dengan rapat massa μ_0, konstanta tegangan dawai T_0, dan ujung dawai terletak pada $x = 0$ dan $x = a$. Energi kinetik suatu dawai merupakan penjumlahan energi kinetik dari potongan kecil dari dawai. Maka energi kinetik dawai dapat dituliskan dalam bentuk

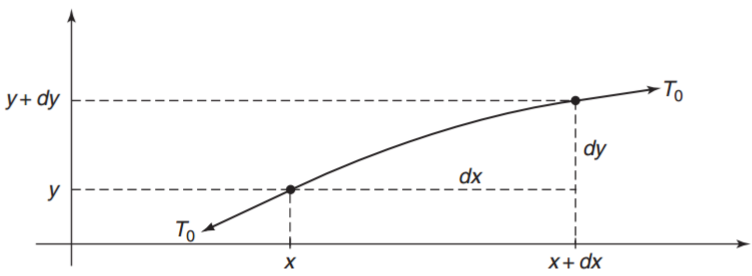
$$T = \int_0^a \frac{1}{2} (\mu_0 \, dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \tag{A.1}$$

energi potensial dari dawai berasal usaha yang dikerjakan untuk meregangkan dawai. Pada keadaan setimbang, elemen kecil dawai terbentang dari $(x, 0)$ hingga $(x + dx, 0)$. Jika elemen kecil dawai diregangkan ke arah transversal dari (x, y) menjadi $(x + dx, y + dy)$ seperti pada gambar (A.1). Dengan mengambil osilasi dari dawai sangat kecil $\partial y/\partial x << 1$, maka perubahan panjang Δl dari elemen kecil dawai ialah

$$\begin{aligned}
\Delta l &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx \\
&= dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \\
&\approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \\
&\approx dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

kerja elemen kecil dawai yang diregangkan ialah $T_0 \Delta l$. Maka total energi potensial pada dawai dengan panjang a

$$V = \int_0^a dx \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \qquad \text{(A.3)}$$



Gambar A.1: dawai yang direnggangkan kearah transversal

Lagrangian dari sistem diberikan dalam bentuk $T - V$, maka dari pers (A.1) dan (A.3) didapatkan lagrangian dari string

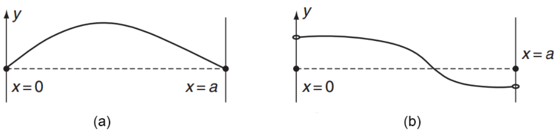
$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\left(\mu_0\, dx\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \int_0^a dx \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) dx \\
&\equiv \int_0^a \mathcal{L}\, dx \qquad (A.4)
\end{aligned}
$$

dengan $\mathcal{L}$ merupakan rapat lagrangian dari sistem dawai non-relativistik

$$
\mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \tfrac{1}{2}\mu_0 \left(\tfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2} T_0 \left(\tfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (A.5)
$$

Untuk mempermudah menganalisa dawai diperkenalkan kondisi batas pada dawai. Terdapat 2 kondisi batas pada dawai yaitu kondisi batas Dirichlet dan kondisi batas Neumann. Diasumsikan dawai terbentang pada sumbu-x dan dawai akan berosilasi pada arah sumbu-y.

Untuk kondisi batas Dirichlet memberikan kondisi spesifik dari



Gambar A.2: (a): dawai dengan kondisi batas Dirichlet. (b): dawai dengan kondisi batas Neumann

ujung dawai yang diikatkan pada suatu dinding seperti pada gambar (A.2). Maka kondisi batas Dirichlet dapat dituliskan dalam bentuk

$$
y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0 \qquad (A.6)
$$

$$\partial y(t, x = 0) = \partial y(t, x = a) = 0 \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(t, x = a) = 0 \tag{A.8}$$

Pada kondisi batas Neumann, kedua ujung dawai dikaitkan pada batang licin. Sehingga ujung dawai dapat bergerak bebas dalam arah vertikal pada sumbu-y seperti pada gambar A.2. Dimana kedua ujung dawai tidak bermassa dan dikaitkan pada batang licin, maka kemiringan dari dawai pada ujung $x = 0, a$ yang merupakan turunan $\frac{\partial y}{\partial x}$ bernilai nol.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a) = 0 \tag{A.9}$$

Pada sistem yang bergerak, digunakan aksi untuk mendeskripsikan gerak dari sistem tersebut. Aksi merupakan integral dari lintasan terhadap lagrangian pada dua titik yang dilalui sistem. Sehingga aksi dapat dituliskan dalam bentuk

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(t)dt \tag{A.10}$$

Untuk mendapatkan persamaan gerak dilakukan variasi aksi terhadap koordinat y,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f}\int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}\delta\frac{\partial y}{\partial t} - T_0\frac{\partial y}{\partial x}\delta\frac{\partial y}{\partial x}\right] dx\, dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f}\int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta y\right) - \mu_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y\right. \\
&\quad \left. -T_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta y\right) + T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta y\right] dx\, dt \\
&= \int_0^a \mu_0\left[\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta y\right]_{t_i}^{t_f} dx - \int_{t_i}^{t_f} T_0\left[\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta y\right]_0^a dt \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_f}\int_0^a \left[-\mu_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y + T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta y\right] dx\, dt
\end{aligned}$$

menggunakan syarat batas pada suku pertama dan kedua. Serta menggunakan prinsip aksi, didapatkan

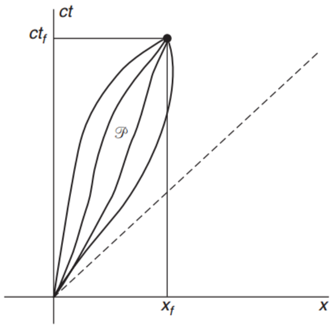
$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_i}^{t_f}\int_0^a \left[-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}y\,\delta y + T_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\,\delta y\right] dx\, dt \\
0 &= \mu_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

Persamaan ini merupakan persamaan gerak dari dawai non-relativistik

A.2 Partikel Relativistik

Partikel relativistik merupakan partikel yang bergerak mendekati kecepatan cahaya $v \approx c$. Digunakan partikel bebas yang mempunyai massa m. Partikel bebas ialah partikel yang tidak dipengaruhi oleh gaya, sehingga partikelnya bergerak dengan kecepatan kosntan.
Untuk membangun aksi dari partikel relativistik. Perlu diketahui lintasan dari partikel tersebut. Lintasan yang dilalui oleh partikel relativistik didalam ruang-waktu dinamakan *world-line*. Meskipun partikelnya statik, partikel tetap bergerak terhadap lintasan pada ruang-waktu karena waktu selalu mengalir.

Dibayangkan partikel yang berada pada lintasan di ruang-waktu



Gambar A.3: diagram ruang-waktu dengan beberapa world-line yang menghubungkan titik awal dengan $(c\,t_f, \vec{x}_f)$

yang dimulai dari titik asal hingga pada titik $(c\ t_f, \vec{x}_f)$. Terdapat beberapa kemungkinan *world-lines* antara titik awal dan titik akhir, seperti pada gambar (A.3). Dimisalkan $\mathcal{P}$ mengambarkan *world-line*. Perpindahan partikel relativistik pada ruang waktu diberikan dalam bentuk

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ (ds)^2 &= G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \\ ds &= \sqrt{G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \end{aligned} \tag{A.12}$$

Aksi didapatkan dengan menggunakan lintasan yang dibentuk partikel dikalikan dengan konstanta untuk menyamakan dimensi. Aksi mempunyai satuan energi dikalikan waktu, sedangkan lintasan partikel mempunyai satuan panjang [L]. Maka dibutuhkan kuantitas lain yang mempunyai satuan ML/T. Digunakan kuantitas massa diam m dan kecepatan cahaya c, karena kuantitas ini bernilai sama terhadap semua pengamat lorentz. Sehingga didapatkan aksi

$$S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{ds}{c} S = -mc \int_{\mathcal{P}} d\tau \sqrt{G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

Aksi partikel relativistik ini invariant terhadap reparameterisasi ulang. Jika diubah paramater kedalam bentuk lain, maka akan didapatkan bentuk aksi yang serupa

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_{\mathcal{P}} d\tau \sqrt{G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \\ &= -mc \int_{\mathcal{P}} d\tau \sqrt{G_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\widetilde{\tau}} \frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\widetilde{\tau}} \frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau} \right)} \\ &= -mc \int_{\mathcal{P}} d\tau \, \frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau} \, \sqrt{G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\widetilde{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\widetilde{\tau}}} \\ &= -mc \int_{\mathcal{P}} d\widetilde{\tau} \, \sqrt{G_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\widetilde{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\widetilde{\tau}}} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Persamaan Gerak dari partikel didapatkan dari variasi aksi terhadap koordinat ruang-waktu

$$\begin{aligned}
S &= -mc\int d\tau\sqrt{-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}} \\
\delta S &= -mc\int d\tau\;\delta\sqrt{-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}} \\
&= -mc\int d\tau\;\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)^{-1/2}\;\delta\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right) \\
&= -mc\int d\tau\;\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta G_{\mu\nu}-\delta\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\right)\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\delta\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\right)G_{\mu\nu}\right) \\
&= -mc\int d\tau\;\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}-\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta x^\mu)\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta x^\nu)G_{\mu\nu}\right) \\
&= -mc\int d\tau\;\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right. \\
&\qquad-\left[\frac{d}{d\tau}\left(\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)-\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\mu\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right] \\
&\qquad\left.-\left[\frac{d}{d\tau}\left(\delta x^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)-\delta x^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\nu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right]\right) \\
&= -mc\int d\tau\;\left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right. \\
&\qquad-\left[-\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\mu\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right] \\
&\qquad\left.-\left[-\delta x^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\nu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right]\right) \\
&\qquad+mc\int d\tau\frac{d}{d\tau}\left(\delta x^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)+mc\int d\tau\frac{d}{d\tau}\left(\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -mc\int d\tau\ \left(-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\alpha \frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right.\\
& -\left[-\delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu}) - \delta x^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right]\\
& \left.-\left[-\delta x^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu}) - \delta x^\nu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right]\right)\\
& +\left(\delta x^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)_{\tau_i}^{\tau_f} + \left(\delta x^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}G_{\mu\nu}\right)_{\tau_i}^{\tau_f}
\end{aligned}
$$

menggunakan variasi pada kondisi awal τ_i dan kondisi akhir τ_f yang bernilai nol, maka suku kedua terakhir bernilai nol

$$\begin{aligned}
&= -mc\int d\tau\ \Bigg(\underbrace{-\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}}_{\alpha\leftrightarrow\mu} \\
&\quad -\left[-\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\mu\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right] \\
&\quad -\left[\underbrace{-\delta x^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\nu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}}_{\mu\leftrightarrow\nu}\right]\Bigg) \\
&= -mc\int d\tau\ \Bigg(-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\delta x^\mu\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu} \\
&\quad -2\left[-\delta x^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{d}{d\tau}(G_{\mu\nu})-\delta x^\mu\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\right]\Bigg) \\
\frac{dS}{\delta x^\mu} &= -mc\int d\tau\ \Bigg(-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\alpha} \\
&\quad +2\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}+2\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu}\Bigg) \\
0 &= -\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\alpha} \\
&\quad +2\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}+2\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu} \\
2\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu} \\
&\quad -\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{dG_{\mu\alpha}}{dx^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \\
G^{\mu\beta}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\tau^2}G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}G^{\mu\beta}\left(\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}-\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}-\frac{dG_{\mu\alpha}}{dx^\nu}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \\
\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial\tau^2} &= \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

persamaan ini, biasa disebut persamaan geodesik.
Persamaan aksi partikel relativistik (A.13) tidak dapat mendeskripsikan pergerakan dari partikel tidak bermassa, persamaan tersebut memberikan aksi bernilai nol dan tidak dari aksi tersebut tidak bisa didapatkan persamaan gerak dari partikel tidak bermassa.
Terdapat aksi lain yang lebih sederhana dengan penampahan parameter baru yang disebut *auxilliary field* $e(\tau)$. Aksi ini diberikan dalam bentuk

$$S = c\int d\tau \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu} - m^2 e\right) \tag{A.15}$$

Aksi ini merupakan integral terhadap lintasannya pada ruang-waktu x^μ, sehingga tidak bergantung pada parameter yang digunakan. Hal ini mengindikasikan aksi (A.15) reparameterisasi invarian. Untuk menguji bahwa aksi (A.15) reparameter invarian, diperkenalkan parameter baru $\tau \to \widetilde{\tau}(\tau)$

$$\begin{aligned} S &= c\int d\tau \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu} - m^2 e\right) \\ &= c\int d\tau \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\widetilde{e}}\frac{d\tau}{d\widetilde{\tau}}\frac{dx^\mu}{d\widetilde{\tau}}\frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\widetilde{\tau}}\frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau}G_{\mu\nu} - m^2 \widetilde{e}\frac{d\widetilde{\tau}}{d\tau}\right) \\ &= c\int d\widetilde{\tau} \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\widetilde{e}}\frac{dx^\mu}{d\widetilde{\tau}}\frac{dx^\nu}{d\widetilde{\tau}}G_{\mu\nu} - m^2 \widetilde{e}\right) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Hasil perhitungan ini memberikan bentuk aksi yang identik dengan aksi pada persamaan (A.15). Sehingga dapat dikatakan aksi pada persamaan (A.15) reparameter invarian.
Persamaan aksi ini memberikan dua persamaan gerak, persamaan gerak terhadap ruang-waktu x^μ dan persamaan gerak terhadap *auxilliary field* e. Untuk persamaan gerak dari variasi aksi terhadap *aux-*

illiary field e

$$
\begin{aligned}
\delta S &= c\int d\tau\,\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}-m^2 e\right)\\
\delta S &= c\int d\tau\,\frac{1}{2}\,\delta e\left(-\frac{1}{e^2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}-m^2\right)\\
\frac{\delta S}{\delta e}=0 &= -\frac{1}{e^2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}-m^2\\
e &= \frac{1}{m}\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}} \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

Jika persamaan gerak ini disubtitusikan kembali ke aksi partikel (A.15)

$$
\begin{aligned}
S &= c\int d\tau\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{m}\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}}}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}-m^2\frac{1}{m}\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}}\right)\\
S &= -mc\int_{\mathcal{P}} d\tau\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

hasil ini memberikan aksi (A.15) ekuivalen dengan aksi (A.13). Untuk persamaan gerak partikel terhadap ruang-waktu x^μ dari aksi partikel dengan *auxilliary field*

$$
\begin{aligned}
\delta S &= c\int d\tau\,\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}-m^2e\right)\\
&= c\int d\tau\,\frac{1}{2}\,\left(\frac{2}{e}\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}+\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta G_{\mu\nu}\right)\\
&= c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\left(2\frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}+\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right)\\
&= c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\left(\frac{d}{d\tau}\left(2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}\right)-2(\delta x^\mu)\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}\right.\\
&\qquad\left.-2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}+\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\alpha\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}}_{\alpha\leftrightarrow\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\left(\frac{d}{d\tau}\left(2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}\right)\right)\\
&\quad -c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\left(-2(\delta x^\mu)\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right.\\
&\quad\left.+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)\\
&= c\,\frac{1}{2e}\,\left(2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}G_{\mu\nu}\right)_{\tau_i}^{\tau_f}\\
&\quad -c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\left(-2(\delta x^\mu)\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-2(\delta x^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}\right.\\
&\quad\left.+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)
\end{aligned}
$$

menggunakan variasi pada kondisi awal τ_i dan kondisi akhir τ_f yang bernilai nol, maka suku kedua terakhir bernilai nol

$$\begin{aligned}
&= -c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\,\delta x^\mu\left(-2\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-2\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)\\
\frac{\delta S}{\delta x^\mu} &= -c\int d\tau\,\frac{1}{2e}\left(-2\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-2\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)\\
0 &= \left(-2\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-2\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)\\
0 &= -2\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu}-\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}-\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dG_{\mu\alpha}}{dx^\nu}\\
&\quad+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mu\beta}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}G^{\mu\beta}\left(-\frac{dG_{\mu\nu}}{dx^\alpha}-\frac{dG_{\mu\alpha}}{dx^\nu}+\frac{dG_{\alpha\nu}}{dx^\mu}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\\
\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} &= \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

solusi persamaan gerak ini memiliki bentuk yang identik dengan persamaan gerak pada persamaan (A.14). Menunjukan bahwa penambahan *auxilliary field* terhadap aksi (A.15) tidak mengubah persamaan gerak dari dawainya

A.3 Bentuk Umum dari Model Dawai

Dawai yang mempunyai dua parameter gerak dan partikel yang mempunyai satu parameter gerak dapat digeneralisir menjadi objek dengan (p+1) parameter, dengan (+1) menandakan suku waktu. Objek yang berpindah di ruang-waktu D-dimensi dengan (p+1) parameter dapat dideskripsikan dengan aksi yang sebanding deengan lintasan dari objek tersebut

$$S = -\kappa \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-deth_{\alpha\beta}} \tag{A.20}$$

$\alpha, \beta = 0, 1...., p$, κ merupakan konstanta untuk menyetarakan dimensi dari lintasan objek dengan dimensi dari aksi, dengan

$$h_{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \sigma^{\beta}} G_{\mu\nu} \tag{A.21}$$

$x^{\mu}\left(\sigma^0 = 0, \sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^p\right), \mu = 0, 1, ..., D-1$
Jika digeneralisasi metrik $h_{\alpha\beta}$ menjadi tidak terikat oleh x^{μ}. Maka metrik $h_{\alpha\beta}$ menjadi metrik *auxilliary field* $g_{\alpha\beta}$. dan metrik ini juga disebut metrik yang *non-dynamic*

$$S_{\text{aux}} = -\frac{\kappa}{2} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-detg_{\alpha\beta}} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \sigma^{\beta}} G_{\mu\nu} - (p-1)\right) \tag{A.22}$$

Salah satu objek yang dapat dideskripsikan dari bentuk umum dari model dawai ialah $2-brane$. $2-brane$ merupakan objek dengan $(3+1)$ parameter $\left(x^{\mu} = x^{\mu}(\sigma^0 = \tau, \sigma^1, \sigma^2)\right)$. Untuk merumuskan aksi dari $2-brane$. digunakan persamaan (A.20) dengan $p = 2$

$$\begin{aligned} S &= -\kappa \int d^{2+1}\sigma \sqrt{-deth_{\alpha\beta}} \\ &= -\kappa \int d\tau d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{-deth_{\alpha\beta}} \end{aligned} \tag{A.23}$$

dengan $\alpha, \beta = 0, 1, 2$. Untuk aksi dengan *auxilliary field* menggunakan persamaan (A.22)

$$\begin{aligned} S_{\text{aux}} &= -\frac{\kappa}{2}\int d^{2+1}\sigma\sqrt{-detg_{\alpha\beta}}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}G_{\mu\nu}-(2-1)\right) \\ &= -\frac{\kappa}{2}\int d\tau d\sigma^{1}d\sigma^{2}\sqrt{-detg_{\alpha\beta}}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}G_{\mu\nu}-1\right) \end{aligned} \tag{A.24}$$

A.4 Ruang $AdS_5 \times\ S^5$

Anti de sitter AdS^d merupakan ruang dengan kurvatur kuadratik negatif sehingga dapat direpresentasikan sebagai hiperboloid yang berada pada permukaan $R^{2,d-1}$

$$\eta_{PQ}Y_PY_Q = -Y_0^2 + Y_1^2 + ... + Y_{d-1}^2 - Y_d^2 = -1 \tag{A.25}$$

yang berada pada permukaan $R^{2,d-1}$ dengan radius dari hiperboloid ialah 1, dengan metrik

$$ds^2 = \eta_{PQ}dY^PdY^Q \qquad \eta_{PQ} = (-1, 1, ..., 1, -1) \tag{A.26}$$

Pada ruang AdS^5 digunakan $d = 5$, dan diparameterisasi dengan 5 koordinat global yang saling tidak terikat. Maka persamaan (A.25) dapat disederhakan

$$\begin{aligned} -1 &= -Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 - Y_5^2 \\ -1 &= -\left(Y_0^2 + iY_5^2\right)\left(Y_0^2 - iY_5^2\right) + \left(Y_1^2 + iY_2^2\right)\left(Y_1^2 - iY_2^2\right)\left(Y_3^2 + iY_4^2\right) \\ &\quad \left(Y_3^2 - iY_4^2\right) \end{aligned} \tag{A.27}$$

diperkenalkan 3 parameter bebas t, ϕ_1, ϕ_2

$$\begin{aligned} -1 &= -\left(a_1e^{it}\right)\left(a_1e^{-it}\right) + \left(a_2e^{i\phi_1}\right)\left(a_2e^{-\phi_1}\right) + \left(a_3e^{i\phi_2}\right) + \left(a_3e^{-i\phi_2}\right) \\ -1 &= -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned} \tag{A.28}$$

diperkenalkan 2 parameter bebas ρ, θ

$$\begin{aligned} -1 &= -a_1^2 + (a_2^2 + a_3^2) \\ -1 &= -\cosh^2\rho + \sinh^2\rho \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \end{aligned} \tag{A.29}$$

dengan

$$a_1 = \cosh\rho \tag{A.30}$$

$$a_2 = \sinh\rho \; \sin\theta \tag{A.31}$$

$$a_3 = \sinh\rho \; \cos\theta \tag{A.32}$$

Maka, didapatkan

$$Y_0 + iY_5 = a_1 e^{it} = \cosh\rho \, (\cos t + i \sin t) \tag{A.33}$$

$$Y_1 + iY_2 = a_2 e^{i\phi_1} = \sinh\rho \; \sin\theta \, (\cos\phi_1 + i \sin \phi_1) \tag{A.34}$$

$$Y_3 + iY_4 = a_3 e^{i\phi_2} = \sinh\rho \; \cos\theta \, (\cos\phi_2 + i \sin \phi_2) \tag{A.35}$$

untuk mendapatkan bentuk eksak dari ds^2, maka ditentukan bentuk dari perpindahan pada setiap koordinat. Untuk Y_0^2

$$Y^0 = \cosh\rho \; \sin t \tag{A.36}$$

maka,

$$dY^0 = \sinh\rho \; \sin t \; d\rho + \cosh\rho \; \cos t \; dt \tag{A.37}$$

Untuk Y_1^2

$$Y^1 = \sinh\rho \; \sin\theta \; \cos\phi_1 \tag{A.38}$$

maka,

$$\begin{aligned} dY^1 &= \cosh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\rho + \sinh\rho \cos\theta \cos\phi_1 \, d\theta \\ &\quad + \sinh\rho \sin\theta \, (-\sin\phi_1) \, d\phi_1 \end{aligned} \tag{A.39}$$

Untuk Y_2^2

$$Y^2 = \sinh\rho \sin\theta \sin\phi_1 \tag{A.40}$$

maka,

$$\begin{aligned} dY^2 &= \cosh\rho \sin\theta \sin\phi_1 \, d\rho + \sinh\rho \cos\theta \sin\phi_1 \, d\theta \\ &\quad + \sinh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\phi_1 \end{aligned} \tag{A.41}$$

Untuk Y_3^2

$$Y^3 = \sinh\rho \cos\theta \cos\phi_2 \tag{A.42}$$

maka,

$$\begin{aligned} dY^3 &= \cosh\rho \cos\theta \cos\phi_2 \, d\rho + \sinh\rho \, (-\sin\theta) \cos\phi_2 \, d\theta \\ &\quad + \sinh\rho \cos\theta \, (-\sin\phi_2) \, d\phi_2 \end{aligned} \tag{A.43}$$

Untuk Y_4^2

$$Y^4 = \sinh\rho \cos\theta \sin\phi_2 \tag{A.44}$$

maka,

$$\begin{aligned} dY^4 &= \cosh\rho \cos\theta \sin\phi_2 \, d\rho + \sinh\rho \, (-\sin\theta) \sin\phi_2 \, d\theta \\ &\quad + \sinh\rho \cos\theta \cos\phi_2 \, d\phi_2 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Untuk Y_5^2

$$Y^5 = \cosh\rho \cos t \tag{A.46}$$

maka,

$$dY^5 = \sinh\rho \cos t \, d\rho + \cosh\rho \, (-\sin t) \, dt \tag{A.47}$$

dari persamaan (A.37),(A.39),(A.41),(A.43),(A.45),(A.47), bisa didapatkan perpindahaan pada ruang AdS_5

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{PQ} dY^P dY^Q \\ &= \eta_{00} dY^0 dY^0 + \eta_{11} dY^1 dY^1 + \eta_{22} dY^2 dY^2 + \eta_{33} dY^3 dY^3 \\ &\quad + \eta_{44} dY^4 dY^4 + \eta_{55} dY^5 dY^5 \\ &= (-1) dY^0 dY^0 + (1) dY^1 dY^1 + (1) dY^2 dY^2 + (1) dY^3 dY^3 \\ &\quad + (1) dY^4 dY^4 + (-1) dY^5 dY^5 \end{aligned} \tag{A.48}$$

dengan,

$$\begin{aligned} dY^0 dY^0 &= (\sinh\rho \sin t \, d\rho)^2 + (\cosh\rho \cos t \, dt)^2 \\ &\quad + 2 (\sinh\rho \sin t \, d\rho) (\cosh\rho \cos t \, dt) \end{aligned} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned} dY^1 dY^1 &= (\cosh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\rho)^2 + (\sinh\rho \cos\theta \cos\phi_1 \, d\theta)^2 \\ &\quad + (\sinh\rho \sin\theta \, (-\sin\phi_1) \, d\phi_1)^2 \\ &\quad + 2 (\cosh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\rho) (\sinh\rho \cos\theta \cos\phi_1 \, d\theta) \\ &\quad + 2 (\cosh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\rho) (\sinh\rho \sin\theta \, (-\sin\phi_1) d\phi_1) \\ &\quad + 2 (\sinh\rho \cos\theta \cos\phi_1 \, d\theta) (\sinh\rho \sin\theta \, (-\sin\phi_1) \, d\phi_1) \end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned} dY^2 dY^2 &= (\cosh\rho \sin\theta \sin\phi_1 \, d\rho)^2 + (\sinh\rho \cos\theta \sin\phi_1 \, d\theta)^2 \\ &\quad + (\sinh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\phi_1)^2 \\ &\quad + 2 (\cosh\rho \sin\theta \sin\phi_1 \, d\rho) (\sinh\rho \cos\theta \sin\phi_1 \, d\theta) \\ &\quad + 2 (\cosh\rho \sin\theta \sin\phi_1 \, d\rho) (\sinh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\phi_1) \\ &\quad + 2 (\sinh\rho \cos\theta \sin\phi_1 \, d\theta) (\sinh\rho \sin\theta \cos\phi_1 \, d\phi_1) \end{aligned} \tag{A.51}$$

$$
\begin{aligned}
dY^3dY^3 \quad = \quad & (\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\rho)^2 + (\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{cos}\phi_2\ d\theta)^2 \\
& + (\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ (-\text{sin}\phi_2)\ d\phi_2)^2 \\
& +2\,(\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\rho)\,(\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{cos}\phi_2\ d\theta) \\
& +2\,(\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\rho)\,(\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ (-\text{sin}\phi_2)\ d\phi_2) \\
& +2\,(\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{cos}\phi_2\ d\theta)\,(\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ (-\text{sin}\phi_2)\ d\phi_2)
\end{aligned} \tag{A.52}
$$

$$
\begin{aligned}
dY^4dY^4 \quad = \quad & (\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{sin}\phi_2\ d\rho)^2 + (\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{sin}\phi_2\ d\theta)^2 \\
& + (\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\phi_2)^2 \\
& +2\,(\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{sin}\phi_2\ d\rho)\,(\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{sin}\phi_2\ d\theta) \\
& +2\,(\text{cosh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{sin}\phi_2\ d\rho)\,(\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\phi_2) \\
& +2\,(\text{sinh}\rho\ (-\text{sin}\theta)\ \text{sin}\phi_2\ d\theta)\,(\text{sinh}\rho\ \text{cos}\theta\ \text{cos}\phi_2\ d\phi_2)
\end{aligned} \tag{A.53}
$$

$$
\begin{aligned}
dY^5dY^5 \quad = \quad & (\text{sinh}\rho\ \text{cos}t\ d\rho)^2 + (\text{cosh}\rho\ (-\text{sin}t)\ dt)^2 \\
& +2\,(\text{sinh}\rho\ \text{cos}t\ d\rho)\,(\text{cosh}\rho\ (-\text{sin}t)\ dt)
\end{aligned} \tag{A.54}
$$

maka, persamaan dapat disederhanakan menjadi

$$
(ds^2)_{AdS_5} \quad = \quad d\rho^2 - \text{cosh}^2\rho\ dt^2 + \text{sinh}^2\rho\left(d\theta^2 + \text{sin}^2\theta d\phi_1^2 + \text{cos}^2\theta d\phi_2^2\right) \tag{A.55}
$$

Selanjutnya, untuk ruang spherical 5-dimensi S^5. dapat direpresentasikan pada permukaan dengan kurvatur kuadratik positif yang berada pada permukaan R^{5+1}

$$
X_mX_m = X_1X_1 + X_2X_2 + X_3X_3 + X_4X_4 + X_5X_5 = 1 \tag{A.56}
$$

dengan jari-jari bernilai 1. Ruang S^5 diparameterisasi dengan 5 koordinat global yang saling tidak terikat. Maka persamaan (A.56) dapat disederhakan, dengan memperkenalkan 3 parameter ψ_1, ψ_2, ψ_3

$$\begin{aligned} 1 &= (X_1 + iX^2)(X_1 - iX^2) + (X_3 + iX^4)(X_3 - iX^4) \\ &\quad +(X_5 + iX^6)(X_5 - iX^6) \\ 1 &= b_1 e^{i\psi^1} b_1 e^{-i\psi^1} + b_2 e^{i\psi^2} b_2 e^{-i\psi^2} + b_3 e^{i\psi^3} b_3 e^{-i\psi^3} \\ 1 &= (b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 \end{aligned} \tag{A.57}$$

diperkenalkan parameter 2 parameter γ, φ

$$\begin{aligned} (b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 &= 1 \\ \sin^2\gamma(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2 &= 1 \end{aligned} \tag{A.58}$$

dengan

$$b_1 = \sin\gamma\ \cos\varphi \tag{A.59}$$

$$b_2 = \sin\gamma\ \sin\varphi \tag{A.60}$$

$$b_3 = \cos\gamma \tag{A.61}$$

maka, didapatkan

$$(X_1 + iX^2) = b_1 e^{i\psi^1} = \sin\gamma\ \cos\varphi\,(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1) \tag{A.62}$$

$$(X_3 + iX^4) = b_2 e^{i\psi^2} = \sin\gamma\ \sin\varphi\,(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2) \tag{A.63}$$

$$(X_5 + iX^6) = b_3 e^{i\psi^3} = \cos\gamma\,(\cos\psi_3 + i\sin\psi_3) \tag{A.64}$$

untuk mendapatkan bentuk eksak dari ds^2 pada ruang S^5, maka ditentukan bentuk dari perpindahan pada setiap koordinat. Untuk X_1^2

$$\begin{aligned} dX_1 &= \text{cos}\gamma\ \text{cos}\varphi\ \text{cos}\psi_1\ d\gamma + \text{sin}\gamma\ (-\text{sin}\varphi)\ \text{cos}\psi_1\ d\varphi \\ &\quad +\text{sin}\gamma\ \text{cos}\varphi\ (-\text{sin}\psi_1)\ d\psi_1 \end{aligned} \tag{A.65}$$

Untuk X_2^2

$$\begin{aligned} dX_2 &= \text{cos}\gamma\ \text{cos}\varphi\ \text{sin}\psi_1\ d\gamma + \text{sin}\gamma\ (-\text{sin}\varphi)\ \text{sin}\psi_1\ d\varphi \\ &\quad +\text{sin}\gamma\ \text{cos}\varphi\ \text{cos}\psi_1\ d\psi_1 \end{aligned} \tag{A.66}$$

Untuk X_3^2

$$\begin{aligned} dX_3 &= \text{cos}\gamma\ \text{sin}\varphi\ \text{cos}\psi_2\ d\gamma + \text{sin}\gamma\ \text{cos}\varphi)\ \text{cos}\psi_2\ d\varphi \\ &\quad +\text{sin}\gamma\ \text{sin}\varphi\ (-\text{sin}\psi_2)\ d\psi_2 \end{aligned} \tag{A.67}$$

Untuk X_4^2

$$\begin{aligned} dX_4 &= \text{cos}\gamma\ \text{sin}\varphi\ \text{sin}\psi_2\ d\gamma + \text{sin}\gamma\ \text{cos}\varphi)\ \text{sin}\psi_2\ d\varphi \\ &\quad +\text{sin}\gamma\ \text{sin}\varphi\ \text{cos}\psi_2\ d\psi_2 \end{aligned} \tag{A.68}$$

Untuk X_5^2

$$\begin{aligned} dX_5 &= (-\text{sin}\gamma)\ \text{cos}\psi_3\ d\gamma \\ &\quad +\text{cos}\gamma\ (-\text{sin}\psi_{3)}\ d\psi_3 \end{aligned} \tag{A.69}$$

Untuk X_6^2

$$\begin{aligned} dX_6 &= (-\text{sin}\gamma)\ \text{sin}\psi_3\ d\gamma \\ &\quad +\text{cos}\gamma\ \text{cos}\psi_3\ d\psi_3 \end{aligned} \tag{A.70}$$

dari persamaan (A.65),(A.66),(A.67),(A.68),(A.69),(A.70), bisa didapatkan perpindahaan pada ruang AdS_5

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX_M dX_M \\ &= dX_0 dX_0 + dX_1 dX_1 + dX_2 dX_2 + dX_3 dX_3 \\ &\quad + dX_4 dX_4 + dX_5 dX_5 \end{aligned} \tag{A.71}$$

dengan,

$$\begin{aligned} dX_1 dX_1 &= (\cos\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\gamma)^2 + (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \cos\psi_1 \, d\varphi)^2 \\ &\quad + (\sin\gamma \cos\varphi \, (-\sin\psi_1) \, d\psi_1)^2 \\ &\quad + 2 (\cos\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\gamma) (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \cos\psi_1 \, d\varphi) \\ &\quad + 2 (\cos\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\gamma) (\sin\gamma \cos\varphi \, (-\sin\psi_1) \, d\psi_1) \\ &\quad + 2 (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \cos\psi_1 \, d\varphi) (\sin\gamma \cos\varphi \, (-\sin\psi_1) \, d\psi_1) \end{aligned} \tag{A.72}$$

$$\begin{aligned} dX_2 dX_2 &= (\cos\gamma \cos\varphi \sin\psi_1 \, d\gamma)^2 + (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \sin\psi_1 \, d\varphi)^2 \\ &\quad + (\sin\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\psi_1)^2 \\ &\quad + 2 (\cos\gamma \cos\varphi \sin\psi_1 \, d\gamma) (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \sin\psi_1 \, d\varphi) \\ &\quad + 2 (\cos\gamma \cos\varphi \sin\psi_1 \, d\gamma) (\sin\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\psi_1) \\ &\quad + 2 (\sin\gamma \, (-\sin\varphi) \sin\psi_1 \, d\varphi) (\sin\gamma \cos\varphi \cos\psi_1 \, d\psi_1) \end{aligned} \tag{A.73}$$

$$\begin{aligned} dX_3 dX_3 &= (\cos\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\gamma)^2 + \left(\sin\gamma\ \cos\varphi\right)\cos\psi_2\ d\varphi)^2 \\ &+ (\sin\gamma\ \sin\varphi\ (-\sin\psi_2)\ d\psi_2)^2 \\ &+ 2\,(\cos\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\gamma)\,(\sin\gamma\ \cos\varphi)\ \cos\psi_2\ d\varphi) \\ &+ 2\,(\cos\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\gamma)\,(\sin\gamma\ \sin\varphi\ (-\sin\psi_2)\ d\psi_2) \\ &+ 2\,(\sin\gamma\ \cos\varphi)\ \cos\psi_2\ d\varphi)\,(\sin\gamma\ \sin\varphi\ (-\sin\psi_2)\ d\psi_2) \end{aligned} \tag{A.74}$$

$$\begin{aligned} dX_4 dX_4 &= (\cos\gamma\ \sin\varphi\ \sin\psi_2\ d\gamma)^2 + (\sin\gamma\ \cos\varphi)\ \sin\psi_2\ d\varphi)^2 \\ &+ (\sin\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\psi_2)^2 \\ &+ 2\,(\cos\gamma\ \sin\varphi\ \sin\psi_2\ d\gamma)\,(\sin\gamma\ \cos\varphi)\ \sin\psi_2\ d\varphi) \\ &+ 2\,(\cos\gamma\ \sin\varphi\ \sin\psi_2\ d\gamma)\,(\sin\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\psi_2) \\ &+ 2\,(\sin\gamma\ \cos\varphi)\ \sin\psi_2\ d\varphi)\,(\sin\gamma\ \sin\varphi\ \cos\psi_2\ d\psi_2) \end{aligned} \tag{A.75}$$

$$\begin{aligned} dX_5 dX_5 &= ((-\sin\gamma)\ \cos\psi_3\ d\gamma)^2 \\ &+ \left(\cos\gamma\ (-\sin\psi_{3)}\ d\psi_3\right)^2 \\ &+ 2\,((-\sin\gamma)\ \cos\psi_3\ d\gamma)\left(\cos\gamma\ (-\sin\psi_{3)}\ d\psi_3\right) \end{aligned} \tag{A.76}$$

$$\begin{aligned} dX_6 dX_6 &= ((-\sin\gamma)\ \sin\psi_3\ d\gamma)^2 \\ &+ (\cos\gamma\ \cos\psi_3\ d\psi_3)^2 \\ &+ 2\,((-\sin\gamma)\ \sin\psi_3\ d\gamma)\,(\cos\gamma\ \cos\psi_3\ d\psi_3) \end{aligned} \tag{A.77}$$

maka, persamaan (A.71) dapat disederhanakan menjadi

$$(ds^2)_{S^5} = d\gamma^2 + \cos^2\gamma\ d\psi_3^2 + \sin^2\gamma\left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\ d\psi_1^2 + \sin^2\varphi\ d\psi_2^2\right) \tag{A.78}$$

Terdapat sistem koordinat lain yang dibangun dari ruang AdS_5, yang disebut koordinat poincare. Dari persamaan konstraint AdS_5

$$\begin{aligned} -1 &= -Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 - Y_5^2 \\ &= -\left(Y_5^2 + iY_0^2\right)\left(Y_5^2 - iY_0^2\right) + +Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 \\ &= -\text{cosh}\rho\, e^{it}\text{cosh}\rho\, e^{-it} + \text{sinh}^2\rho\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2\right) \end{aligned} \tag{A.79}$$

maka didapatkan

$$Y_0 = \text{cosh}\rho\ \text{sin}t$$

$$Y_5 = \text{cosh}\rho\ \text{cos}t$$

$$Y_i = n_j\ \text{sinh}\rho \qquad = 1, 2, 3, 4$$

dengan $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 1$. selanjutnya, didefinisikan

$$Y_0 = \text{cosh}\rho\ \text{sin}t \equiv \frac{x_0}{z} \tag{A.80}$$

$$Y_i = n_i\ \text{sinh}\rho \equiv \frac{x_i}{z} \qquad = 1, 2, 3 \tag{A.81}$$

$$Y_5 = \text{cosh}\rho\ \text{cos}t \equiv \frac{1}{2z}\left(1 + z^2 - x_0^2 + x_i^2\right) \tag{A.82}$$

$$Y_4 = n_4\ \text{sinh}\rho \equiv \frac{1}{2z}\left(-1 + z^2 - x_0^2 + x_i^2\right) \tag{A.83}$$

dengan turunannya

$$dY_0 = \frac{1}{z}dx_0 - \frac{x_0}{z^2}dz \tag{A.84}$$

$$dY_i = \frac{1}{z}dx_i - \frac{x_i}{z^2}dz \tag{A.85}$$

$$dY_5 = -\frac{1}{2z^2}dz\left(1 + z^2 - x_0^2 + x_i^2\right) + \frac{1}{2z}\left(2z\;dz - 2x_0\;dx_0 + 2x_i\;dx_i\right) \tag{A.86}$$

$$dY_4 = -\frac{1}{2z^2}dz\left(-1 + z^2 - x_0^2 + x_i^2\right) + \frac{1}{2z}\left(2z\;dz - 2x_0\;dx_0 + 2x_i\;dx_i\right) \tag{A.87}$$

maka, didapatkan perpindahan pada ruang AdS_5 dalam sistem koordinat poincare

$$\begin{aligned} ds^2_{AdS_5} &= \eta_{PQ}dY^P dY^Q \\ &= \eta_{00}dY^0dY^0 + \eta_{11}dY^1dY^1 + \eta_{22}dY^2dY^2 + \eta_{33}dY^3dY^3 \\ &\quad +\eta_{44}dY^4dY^4 + \eta_{55}dY^5dY^5 \\ &= \frac{1}{z^2}\left(\eta_{mn}dx^m dx^n + dz^2\right) \end{aligned} \tag{A.88}$$

perpindahan pada ruang AdS_5xS^5 dapat dituliskan dalam bentuk penjumlahan antara perpindahan pada ruang AdS_5 dan ruang S^5

$$ds^2_{AdS_5\times S^5} = \frac{1}{z^2}\left(\eta_{mn}dx^m dx^n + dz^2 + z^2\;d\Omega_5\left(\gamma, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3\right)\right) \tag{A.89}$$

dengan,

$$d\Omega_5\left(\gamma, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3\right) \equiv ds^2_{S^5} \tag{A.90}$$

BIODATA

Penulis dilahirkan di Batusangkar pada 14 Agustus 1995, yang merupakan anak kedua dari pasangan Ismail dan Yuliarti. Pendidikan formal penulis yaitu TK Adzkia Padang, SD Islam Budi Mulia Padang, MTsN Model Padang, MAN 2 Padang. Setelah lulus dari MAN 2 Padang pada tahun 2013, penulis melanjutkan studi di Jurusan Fisika FMIPA-ITS melalui jalur SBMPTN. Pendidikan non-formal meliputi 4th Particle Physics School in South East Asia, Vietnam; School of Neutrino, Thailand; Memorial Meeting for Professor Abdus Salam’s 90th Birthday, Singapore; Conference on 90 Years Quantum Mechanics, Singapore; Inresident Visiting Student, Thailand.

Di Jurusan Fisika, penulis mengambil Bidan Studi Fisika Teori dan bergabung menjadi anggota Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA). Selama kuliah, penulis pernah menjadi asisten dosen Fisika dasar I dan II, asisten laboratorium Fisika Modern, asisten laboratorium Gelombang.